BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Erläuterungen über die Kästnerische Analysis des Unendlichen ; ... worinn zugleich die hyperbolische Logarithmen der Zahlen 1 - 500 in 13 Decimalstellen enthalten sind
Bd.: [1]

Giessen (1778)

Math.p. 281-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082249-2
VD18 90034457

Erläuterungen über die Kästnerische Analysis des Unendlichen

von

Carl Christian Langsdorf,

der Hochfürstl. Hessen-Homburgischen und Königl. Schwedischen patriotischen Gesellschaften, und der Kurfürstl. Pfälzischen physikalisch-oekonomischen Gesellschaft zu Lautern ordentlichem Mitgliede.

worinn zugleich die hyperbolische Logarithmen der Zahlen 1 — 500 in 13 Decimalstellen enthalten sind.

Giessen,
in der Kriegerischen Buchhandlung.
1778.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

An meinen

theuersten Gönner

den Herrn

Bergrath und Professor

Boehm

zu Giessen.

Hochzuverehrender Herr Professor,

Theuerster Gönner!

Endlich sehe ich meinen Wunsch erfüllt, Ihnen, meinem theuersten Gönner, für die Gewogenheit, der Sie mich bisher gewürdigt haben, öffentlich Dank sagen zu können. Daß Sie Hochachtung verdienen, mehr Hochachtung, als ich Ihnen jemals an den Tag zu legen im Stande sein werde — das brauch ich Ihnen nicht hier erst zu sagen, da jeder von dem grossen Haufen Ihrer Vereh-

rer eben so von sich denkt, und so von sich denken muß, wenn ihm Männer, die Kenntnisse mit Menschenliebe und dem bestdenkenden Herzen vereinigen, schätzbar sind. Das können Sie aber doch überzeugt sein, daß es sich Niemand so sehr zur Pflicht machen kann, Sie zu schätzen, als ich, und daß ich gewiß auf jede Gelegenheit aufmerksam sein werde, wo ich Ihnen einen Beweiß davon ablegen kann.

Schon vorigen Winter, da ich das Glück hatte, mich bei Ihnen in Giessen aufzuhalten — ein Aufenthalt, der mir bei allem dem widrigen Schicksaal, das mir hinten nachfolgte, immer noch schätzbar bleibt! munterten Sie mich zu verschiedenen Malen auf, in meinen Nebenstunden die Ausarbeitung der Erläuterungen über die Anal. des Unendlichen zu unternehmen, und eben den

Rath

Rath haben Sie nachher noch zweimal schriftlich wiederholt — sehen Sie, mein theuerster Gönner, diese Blätter als einen Beweiß an, wie schätzbar mir Ihr Rath ist, und mit wie vielem Vergnügen ich ihm folge. Ob übrigens meine Arbeit Ihrem Erwarten gemäß ist — das zu glauben, bin ich nicht stolz genug. Der Trost bleibt indessen mir noch übrig, daß von den vielen, die es besser hätten machen können, es bisher noch keiner wirklich übernommen hat. Und ist das nicht schon Beruhigung genug für mich, daß ich Ihrem Rath gefolgt bin? Ich zweifle gar nicht, daß sich manches hätte besser auseinander setzen lassen. Ich hoffe aber auch, daß man mir noch die Gerechtigkeit werde wiederfahren lassen, die man dergleichen Bemühungen sonsten noch wiederfahren zu lassen gewohnt ist. Von Ihnen wenigstens bin ich dieses versi-

chert. Durchblättern Sie nun diesen kleinen Aufsatz, und sagen Sie mir, ob er eine Fortsetzung werth ist. Schenken Sie mir ferner Ihre Gewogenheit, und geben Sie mir selbst Gelegenheit, mich derselben recht würdig zu machen. Ich bin mit der vollkommensten Hochachtung

Dero

Darmstadt,
den letzten August
1778.

ganz gehorsamster Diener

C. C. Langsdorf.

Vor-

Vorrede.

Ob wir gleich über die Zeiten hinaus sind, wo man die Namen der Differential- und Integralrechnung wie Benennungen magischer Künste anstaunt oder gar verabscheut, so kann man doch nicht läugnen, daß noch viele und vielleicht die meisten sich blos durch das Bedenken, daß die Erlernung der Analysis des Unendlichen unüberwindliche Schwierigkeiten koste, von dem Vorsatz abhalten lassen, sich so ungemein nützliche Kenntnisse eigen zu machen. Für solche, und die sich überdas nicht mit der in Wolfs Anfangsgründen befindlichen auf ziemlich unsichere Gründe gebauten Anleitung begnügen wollen, sind gegenwärtige Blätter bestimmt. Ich bin

auch nicht der erste, der behauptet, daß das Kästnerische Buch eine Beleuchtung und Auseinandersetzung verdiene. Herr Clemm sagt in seinem Lehrbuche, das Kästnerische Werk sei nicht sowohl für Anfänger als vorzüglich für geübte Leser geschrieben. In der That ist dieses auch ein Vorzug, der überhaupt des Hrn. Hofr. Werken eigen ist, und dessen Werke selbst Lehrern nützlich macht, ohne daß ihn Anfänger deßwegen tadeln dürften:

> Der Leser, dem man schreibt, bestimmt des Autors Pflicht;
> Wenn Kästner Lehrer lehrt, les ihn kein Schüler nicht.

Auch urtheilt Hr. Prof. Scheibel in seiner mathematischen Bücherkenntnis in der Recension von Hrn. Funks Anfangsgründen S. 676. u. f. völlig eben so: „Die Kästnerischen Anfangsgründe halten wir eigentlich für eines der vornehmsten Handbücher „eines Lehrers, der zufrieden seyn kann, „wenn er sie völlig versteht. Als eine Anleitung zu dessen Schriften sind des Hrn. „V. Anfangsgründe sehr gut gerathen. „Wir setzen noch folgendes hinzu. Da der

„Hr.

„Hr. Prof. Kies in Tübingen einen sehr „glücklichen Anfang gemacht hat, die Kästnerische Analysis in einigen akademischen „Streitschriften zu erläutern, welche aber „in wenige Hände kommen können, wir „aber über Wolfs Auszug Erläuterungen „und Zusätze bis zum Ueberdrus in grosser „Anzahl haben, so würde der Hr. V. bei „seiner Bekanntschaft mit dem Kästnerischen „Vortrage, Anfängern und Liebhabern der „Mathematik einen wesentlichen Dienst geleistet haben, wenn er, besonders bei der „ungemeinen Deutlichkeit seines Vortrags, „die Ausarbeitung besonderer Erläuterungen eines Werks unternommen hätte, bei „dessen gedrungener Kürze sie dem Leser sehr „zu statten kämen. Denn es kann Niemand von dem Hrn. Hofr. bei seinen überhäuften Arbeiten erwarten, daß er durch „eigene Vorlesungen über sein Werk nach „der vortreflichen Methode des Hrn. v. „Segner, das Studieren derselben erleichtern sollte. Sogut aber, als Newtons „Principia durch die umständliche Commentarios des Le Seur und Jacquier Jedermann verständlich geworden, und man alte Schriftsteller mit allen möglichen Scho-

„liis,

„liis, Notis, Animaduersionibus u. dergl. „erläutert, so könnte man wohl den Schrif„ten unserer besten neuen Mathematiker „gleiche Ehre zu erweisen anfangen.“

Demohngeachtet hat sich bis hierher noch Niemand entschlossen, dergleichen Erläuterungen, wie ich über die Anal. endl. Gr. aufgesetzt habe, auszuarbeiten, obgleich denen, deren Beruf es ist, Collegien darüber zu lesen, eine solche Arbeit nicht so gar schwer sein würde. Mein Beruf ist dieses gar nicht, so angenehm er mir auch wäre, und ich glaube deßwegen, besonders da man mich öffentlich mit einem unverdientem Zutrauen zu dieser Arbeit aufgefodert hat, mit einigem Recht, Anspruch auf die Nachsicht des Publikums machen zu können. Die Gedult, die dazu erfodert wird, alle Sätze und Rechnungen in einem Buche, wie das Kästnerische ist, blos in der Absicht durchzugehen, um Erläuterungen darüber aufzusetzen, wird jeder kennen, dem die Algebra auch nur dem Namen nach bekannt ist, und wenn ich nicht hoffen könnte, daß man darauf bei der Beurtheilung dieser Blätter Rücksicht nehmen würde, so würde ich mich nicht

nicht hieran gewagt haben, und ich bin deß-wegen noch immer bereit, davon abzubrechen, wenn man mein Bemühen für überflüßig halten wird. Ich liefere übrigens hier fürs erste nur die Erläuterungen über die ersten 192 Seiten, nämlich bis an den wichtigen Abschnitt von den Quadraturen und Rectificationen, die zum Kreise gehören, und hoffe die Erläuter. über den übrigen Theil in dem folgenden Stück zu fassen. Ich habe mich überall, wo es nöthig schiene, bemüht, die Sätze und Rechnungen gehörig aus einander zu setzen, und die Sache selbst Anfängern begreiflicher zu machen, als sie denen sein mag, die dumm genug sind, solche für Ketzer zu erklären, welche den Wolfischen Vortrag für fehlerhaft ausgeben. Jetzt, da, wie sich einer meiner ehemaligen Lehrer auszudrucken pflegte, die Wälder so lichte gehauen sind, daß sich kein Wolf mehr drinnen verbergen kann, hat man kein Bedenken mehr zu tragen, dem Anfänger das Fehlerhafte von Wolfs Anfangsgründen zu entdecken. Wolfs Verdienste sind zu groß, als daß man sie deswegen verkennen sollte, und sein Ruhm zu glänzend, als daß man ihn darum verdunkeln

keln könnte. Deswegen habe ich auch hier keinen Anstand genommen, hin und wieder den Kästnerischen Vortrag mit dem Wolfischen zu vergleichen, und das Fehlerhafte des letztern zu erwähnen. Selbst hab ich mir an verschiedenen Orten die Freiheit verstattet, einige Sätze beizubringen, die mit denen im Buche nicht völlig übereinstimmen; ich habe also deswegen gewiß Erinnerungen zu gewarten, die mir desto schätzbarer sein werden, je gegründeter sie sind.

Bei der Integralrechnung ist besonders die wichtige Lehre von den logarithmischen Differentialien ausführlich erläutert worden. Besonders war es mir angenehm, daß ich von dem Satz, daß jeder Zahl ausser dem einen möglichen Logarithmen noch unzählig viele unmögliche zugehören, einen so leichten Beweiß angeben konnte, der sonst ziemlich schwer vorgetragen wird. Den Beweiß also kann ich neu nennen, und ohne Zweifel würde ich auch den erwähnten Satz selbst aus 221. leicht erkannt haben, wenn ich ihn auch zuvor noch nicht gewußt hätte. Zu grösserer Deutlichkeit habe ich die Berechnung verschiedener hyperbolischer

Loga=

Logarithmen ganz hergesetzt. Und weil ich die Bemühung des Hrn. Wolframs, durch den wir Tabellen von den hyperbolischen Logarithmen bis auf 48 Decimalstellen erhalten, erst vor kurzem durch die gütige Nachricht des Hrn. Hofr. Kästners erfahren habe, so habe ich die Logarithmen der Zahlen 1 — 500, die ich mit vieler Mühe selbst berechnet hatte, doch deßwegen hersetzen wollen, weil Anfänger obige Tabellen doch nicht so leicht erhalten werden.

Nun erlaube man mir, noch verschiedenes, das die Erläut. der Anal. endl. Gr. betrift, zu erinnern. Ich habe mich das. S. 427. auf meine Erläuter. über Hubens Abhandl. von den Kegelschnitten bezogen, und weil solche aus verschiedenen Ursachen nachher nicht gedruckt wurden, so wurde ich dadurch genöthigt, einiges daraus herzusetzen. Den Unterschied der eingebildeten und unmöglichen Grössen a. a. O. S. 366. §. 34. wo statt Euler Tempelhof stehen sollte, wird man hier §. 223. am Ende angegeben finden. Der Ort, auf den ich mich a. a. O. S. 367. §. 55. bezogen habe, findet sich das. S. 306 (*). Auch hat a. a. O.

in

in der Lehre vom Interusurio ein einziges Versehen zu mehrern Fehlern Anlaß gegeben; sie sind zwar nicht schwer zu verbessern; am Ende dieses Auffsatzes habe ich mich indessen der Gelegenheit bedient, solche zu erwähnen. Ausserdem erwähne ich noch, daß der Göttinger Hr. Recensent gegründete Erinnerungen gegen die Erl. S. 365. §. 18. gemacht hat, und ich wollte deßwegen Anfängern nicht mehr rathen, die Irrationalgrössen für halb mögliche zu halten.

C. C. Langsdorf.

Verschiedene Anmerkungen
über
die Kegelschnitten.

Hube §. 24. (II. Buch.)

Es lassen sich hier noch einige Sätze beifügen, welche die Berechnung einiger Linien betreffen, und weil sie mit den vorhergehenden (a. a. O.) von gleicher Erheblichkeit sind, so verdienen sie allerdings beigebracht zu werden.

I. Die Entfernung des Brennpunkts von der Normale zu finden

Aufl. Es ist $EM = \sqrt{(FM^2 - FE^2)} = \left(\sqrt{FM^2}\right.$

$$\left.- \frac{n^2 . FM^2}{4 MR^2}\right) = \sqrt{\left(\frac{4 . MR^2 . FM^2 - n^2 . FM^2}{4 MR^2}\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{(4MR^2 - n^2) . FM^2}{2MR}\right)} = \frac{FM}{2MR}\sqrt{(4MR^2 - n^2)}$$

A =

$= \frac{FM}{MR} \sqrt{(MR^2 - \frac{1}{4}n^2)}$. Nun ist aber $ML = \frac{1}{2}n$, also $\frac{1}{4}n^2 = ML^2$, mithin $EM = \frac{FM}{MR} \sqrt{(MR^2 - ML^2)} = \frac{FM}{MR}$. $RL = \frac{FM.\,y}{MR}$. $\sqrt{(1 + m^2)}$ weil $RL = y.\ \sqrt{(1 + m^2)}$ (§. 23. a. a. O.) Zieht man nun FN auf MR senkrecht, so ist

$$FN = EL = \frac{y.\ FM\ \sqrt{(1 + m^2)}}{MR}$$

$$= \frac{y.\ (q\sqrt{(1 + m^2)} + x(1 + m^2)}{MR}$$

welches die gesuchte Entfernung ist.

II. Einen Ausdruck für die Subtangente zu finden, wenn die Abscissenaxe ein Durchmesser ist.

Aufl. Aus §. 10. a. a. O. ist die Subtangente

$$s = \frac{2y^2 + axy + by}{ay + 2cx + d}$$

also ist hier, da $a = b = 0$ ist,

$$s = \frac{2y^2}{2cx + d}$$

Nun aber ist (§. 1. a. a. O.) $c = \frac{1}{4}a^2 - m^2$ und $d = \frac{1}{2}ab - n$, also hier $c = - m^2$, und $d = \frac{1}{2}ab - n$, also hier $c = - m^2$, und $d = - n$, folglich

folglich $\text{ſ} = \frac{2\,y^2}{2\,c\,x + d} = \frac{2\,y^2}{-2\,m^2\,x - n}$

$= \frac{-y^2}{m^2 x + \frac{1}{2} n} = \frac{-y^2}{m^2(x+p)} = \frac{-(m^2 x^2 + 2\,m^2\,p\,x)}{m^2\,(x+p)}$

oder wie (§. 23. a. a. O.)

$= \frac{m^2 x^2 + 2\,m^2\,p\,x}{m^2\,(x+p)} = \frac{x^2 + 2\,p\,x}{x+p} = x + \frac{p\,x}{x+p}$

III. Einen Ausdruck für die Linie AT zu finden, die auf der verlängerten Axe liegt, und von dem Scheitelpunkt bis an die Tangente reicht.

Aufl. Sie ist $= \text{ſ} - x = x + \frac{p\,x}{x+p} - x$ aus II.

$= \frac{p\,x}{x+p}$

IV. Einen Ausdruck für die Linie bc zu finden, welche auf der Spitze der Axe senkrecht steht und bis an die Tangente reicht. (ſ. Fig. 1.)

Aufl. Es ist (fig. H)

$$ac : bc = ae : Me \text{ oder}$$

$$\left(\frac{p\,x}{x+p}\right) : bc = \left(x + \frac{p\,x}{x+p}\right) : y$$

also $$bc = \frac{y.\,px}{(x+p).\left(x+\frac{px}{x+p}\right)}$$

$$= \frac{y.\,px}{x^2+px+px}$$

$$= \frac{py}{x+2p}$$

V. Die Entfernung des Scheitelpunkts von der Tangente dc (fig. H) zu finden.

Aufl. Da überhaupt die Subnormale

$$= \pm m^2.(x+p)$$

so wird hier $e\mu = \pm m^2.(x+p)$

und $$ae = x + \frac{px}{x+p};$$

also $$a\mu = \pm m^2.(x+p) + x + \frac{px}{x+p}$$

$$= \frac{\pm m^2 (x+p)^2 + x^2 + 2px}{x+p}$$

Nun ist

$$a\mu : M\mu = ac : cd$$

also $$cd = \frac{ac.\,M\mu}{a\mu}$$

Da also $ac = \frac{px}{x+p}$ (aus III.)

und

und $M\mu = \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 + (1 \pm m^2)y^2\right)}$ (§. 23. a. a. O.)

so erhält man

$$cd = \frac{\frac{px}{x+p} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 + (1 \pm m^2)y^2\right)}}{\left(x^2 + 2px \pm m^2 (x+p)^2\right) : (x+p)}$$

$$= \frac{px\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 + (1 \pm m^2)y^2\right)}}{x^2 + 2px \pm m^2 . (x+p)^2}$$

§. 5. (IV. Buch.)

Ich will hier noch einige Sätze, welche die Berechnung einiger anderer hier vorkommenden Linien betreffen, und sich auf die drei verschiedene Arten von Kegelschnitten (§. 4. 5. 6. III. Buch) beziehen, beifügen. Bei der Hyperbel und Ellipse ist die Axe $= \pm \frac{n}{m^2}$; das obere Zeichen gilt nämlich hier allemal für die Ellipse, das untere für die Hyperbel. Nennt man also die Axe a, so ist

$$a = \pm \frac{n}{m^2}$$

$$\text{und } m^2 = \pm \frac{n}{a},$$

man sieht leicht, daß ebendas für die Parabel gelte, denn bei ihr ist $a = \infty$, also $m = 0$. Ich werde mich nun in der Folge dieser Substitution des Werths von m^2 bedienen. Die hierher gehörige Aufgaben sind folgende:

I. Eine Gleichung für die Subtangente s bei jedem Kegelschnitt zu finden.

Aufl. Weil überhaupt

$$s = x + x \frac{p}{x + p}$$

so ist nach gehöriger Substitution

$$s = x \pm x. \frac{n : 2m^2}{x \pm n : 2m^2} =$$

$$x \pm x. \frac{n : \frac{2n}{a}}{x \pm n : \frac{2n}{a}} = x \pm x. \frac{\frac{1}{2}a}{x \pm \frac{1}{2}a} =$$

$$x \pm \frac{ax}{2x \pm a} = \frac{2x^2 \pm 2ax}{2x \pm a} = \frac{x^2 \pm ax}{x \pm \frac{1}{2}a}.$$ Für die Parabel wird diese Gleichung dadurch, daß man $a = \infty$ setzt, einfacher; nämlich $s = \frac{x^2 \pm x.\infty}{x \pm \frac{1}{2}\infty}$ wo im Zähler das x^2, und im Nenner das x verschwinden; und es bleibt noch $s = \frac{x.\infty}{\frac{1}{2}.\infty} = 2x.$

II. Eine Gleichung für die Tangente zu finden.

Aufl. Sie heisse T, so ist

$$T^2 = s^2 + y^2$$

=

$$=\left(\frac{\pm ax + x^2}{x + \frac{1}{2}a}\right)^2 \pm m^2x^2 + nx = (a(x^2 \pm ax)^2$$

$$\pm nx^2(x \pm \tfrac{1}{2}a)^2 + anx.(x \pm \tfrac{1}{2}a)^2) : a.(x \pm \tfrac{1}{2}a)^2$$

$$= \frac{ax^2.(x \pm a)^2 \pm nx(x \pm a).(x \pm \frac{1}{2}a)^2}{a.(x \pm \frac{1}{2}a)^2} =$$

$$\frac{(ax^2.(x \pm a) \pm nx.(x \pm \frac{1}{2}a)^2).(x \pm a)}{a.(x \pm \frac{1}{2}a)^2} \quad \text{(N.}$$

Für die Parabel verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$T^2 = \frac{\infty.x^2.\infty + \frac{1}{4}nx.\infty^2}{\frac{1}{4}\infty^2}$$

$$= \frac{x^2 + \frac{1}{4}nx}{\frac{1}{4}}$$

$$= 4x^2 + nx$$

Auf diesen Ausdruck kommt man auch kürzer so:

$$T^2 = ſ^2 + y^2$$

$$= 4x^2 + nx$$

weil in der Parabel $ſ = 2x$ und $y = nx$;

III. Einen Ausdruck für die Subnormale zu finden.

Aufl. Sie ist $= \pm m^2(x + p)$ §. 23. II. B.) =

$$\pm \frac{n}{a}\left(x \pm \frac{n}{2m^2}\right) = \pm \frac{n}{a}.x + \frac{n}{a}.\frac{n}{2n:a}$$

 =

$= \pm \frac{n}{a} x + \frac{1}{2} n$ und für $a = \infty$, ist sie $= \frac{1}{2} n$.

IV. Einen Ausdruck für die Normale zu finden.

Aufl. Sie heisse P, so ist

$$P^2 = (m^2 + 1) . y^2 + \frac{1}{4} n^2 \text{ (§. 23. II. B.)}$$

$$= \frac{1}{4} n^2 + (1 \pm m^2) . (n x \pm m^2 x^2)$$

$$= \frac{1}{4} n^2 + n x \pm \frac{n x^2}{a} \pm \frac{n^2 x}{a} + \frac{n^2 x^2}{a^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} a^2 n^2 + a^2 n x \pm a n x^2 \pm a n^2 x + n^2 x^2}{a^2}$$

$$= \frac{n . \left(n . \left(\frac{1}{4} a^2 \pm a x + x^2\right)\right) + a^2 x \pm a x^2)}{a^2}$$

$$= \frac{n . \left(n . \left(\frac{1}{2} a \pm x\right)^2 + a x . (a \pm y)\right)}{a^2}$$

also für $a = \infty$

$$= n x + \frac{1}{4} n^2$$

V. Eine Gleichung für das Stück AT der verlängerten Axe, das von dem Scheitelpunkt bis an die Tangente reicht, zu finden.

Aufl. Es ist $AT = \frac{p x}{x + p} = \frac{(n : 2 m^2) . x}{x \pm n : 2 m^2}$

$= \frac{\pm \frac{1}{2} a x}{x \pm \frac{1}{2} a} = \frac{a x}{a \pm 2 x}$, also für $a = \infty$, $= x$.

VI. Eine

VI. Eine Gleichung für die Linie, welche senkrecht auf der Spitze der Axe steht, und bis an die Tangente reicht, anzugeben.

Aufl. Sie ist $= \frac{py}{x+2p} = \frac{p\sqrt{(m^2x^2+2m^2px)}}{x+2p}$,

also ihr Quadrat $= \frac{p^2(m^2x^2+2m^2px)}{(x+2p)^2} =$

$\frac{a^2.\left(\frac{n}{a}x^2+nx\right)}{4.(x+a)^2} = \frac{(x+a).anx}{4.(x+a).(x+a)} = \frac{anx}{4.(x+a)}$

also für $a = \infty$, $= \frac{\infty . nx}{4.\infty} = \frac{1}{4}nx$;

VII. Die Entfernung des Scheitelpunkts von der Tangente zu finden.

Aufl. Sie ist $= \frac{px\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2+(1\pm m^2)y^2\right)}}{x^2+2px\pm m^2(x+p)^2}$

$= \frac{\pm\frac{1}{2}ax\sqrt{\left[\frac{1}{4}n^2+\left(1\pm\frac{n}{a}\right)y^2\right]}}{x^2\pm\left(ax+\frac{n}{a}(x+\frac{1}{2}a)^2\right)}$

 =

$$= \frac{\pm \frac{1}{2} a^2 x \sqrt{\left[\frac{1}{4} n^2 + \frac{a y^2 + n y^2}{a}\right]}}{a x^2 \pm \left(a^2 x + n (x + \frac{1}{2} a)^2\right)}$$

Nun ist aber $y^2 = m^2 x^2 + 2 m^2 p x = n x \pm \frac{n x^2}{a}$

also obige Entfernung =

$$\frac{\pm \frac{1}{2} a^2 x \sqrt{\left[\frac{1}{4} n^2 + \frac{a n x \pm n x^2 \pm n^2 x + n^2 x^2 : a}{a}\right]}}{a x^2 \pm \left(a^2 x + n . (x + \frac{1}{2} a)^2\right)}$$

also für $a = \infty$, $= \frac{\frac{1}{2} \infty^2 . x \sqrt{(\frac{1}{4} n^2 + n x)}}{(x + \frac{1}{4} n) . \infty^2} =$

$$\frac{x \sqrt{(\frac{1}{4} n^2 + n x)}}{2 x + \frac{1}{2} n}$$

VIII. Einen andern Ausdruck für FM, als den (§. 22. II. B.) zu finden.

Aufl. Es ist $FM = q + x \sqrt{(1 + m^2)}$ (§. 22. II. B.)

$$= q + x \sqrt{\left(1 \pm \frac{n}{a}\right)}$$

Nun ist aber $\sqrt{\left(1 \pm \frac{n}{a}\right)}$ der Quotient von

$$\frac{\frac{1}{2} n \pm \frac{1}{2} a \mp \frac{1}{2} a \sqrt{\left(1 \pm \frac{n}{a}\right)}}{\mp \frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} a \sqrt{\left(1 \pm \frac{n}{a}\right)}}$$

=

$$= \frac{\frac{1}{2}n - q}{q} \quad \text{a. a. O.}$$

Also ist

$$FM = q + x . \left(\frac{\frac{1}{2}n - q}{q}\right)$$

Soviel mußte ich aus meinen über Gubens Abhandlung aufgesetzten Anmerkungen aus der in der Vorrede angeführten Ursache hier beibringen, und man wird mich dießfalls hoffentlich entschuldigen, weil es nicht meine Schuld ist, daß die erwähnte Anmerkungen noch nicht besonders im Drucke erschienen sind.

Erläu-

Erläuterungen
über die
Kästnerische Analysis des Unendlichen.

I. die Differentialrechnung.

§. 1.

Anfänger sind sonsten gewohnt, gleich beim Anfang einer Wissenschaft, selbige erklärt zu finden; und freilich scheint es auch der ordentlichen Methode am angemessensten zu seyn, dem Anfänger zuvorderst von der Absicht der Wissenschaft, die er jeẓt lernen soll, Begriffe beizubringen, ehe man die Grundsäẓe derselben vorträgt. Wenn indessen Hr. Euler selbst das Geständnis ablegt, daß es schwer sei, Jemanden von der Natur und der eigentlichen Absicht der Differentialrechnung einen deutlichen Begrif beizubringen, ehe man noch was von ihren Grundsäẓen abgehandelt hat, so wird es Anfängern auch nicht unerwartet sein, wenn sie nicht gleich hier von der Wissenschaft, die in der Folge

Folge abgehandelt werden soll, die Erklärung finden. Man thut in solchen Fällen am besten, man liest fort, bis man in den Stand gesetzt wird, sich selbst eine Erklärung zu machen, oder deutlich genug einzusehen, was eigentlich die Analysis des Unendlichen sagen wolle. Meiner jetzigen Absicht wird es indessen gemäß sein, einige Gedanken, die dem Anfänger die Sache erläutern werden, herzusetzen.

Das Gesetz der Stetigkeit liegt in der ganzen Mathematik zum Grunde, und auf ihm beruht die ganze Analysis des Unendlichen. (S. Anfangsgründe der Mathem. I. Th. S. 5. ebendas. Geom. §. 6. Anm. u. Anal. des Unendl. S. 49.) Es kommt keine Grösse auf einmal aus einem Zustand in den andern, sie kommt allemal zuvor in einen Zwischenzustand. (s. Fig. 2.) Soll der Punkt a, der die grade Linie ab beschrieben hat, die ac beschreiben, oder soll eine grade Linie aus dem Zustand ab in den Zustand ac kommen, so muß sie zuvor in alle mögliche Zwischenstände aα, aβ, aγ treten; und selbst aus dem Zustand ab in den aα zu gelangen, muß sie zuvor in alle Zustände, die zwischen aα und ab liegen, kommen. Der **nächstfolgende** Zustand, in den die grade Linie aus dem ab gelangen kann, muß also derjenige sein, zwischen dem sich kein anderer mehr gedenken läßt. Nähme man an, einen Zustand, der noch merklich von dem ab verschieden ist, als den nächstfolgenden von ab an, so müssen vermöge des Gesetzes der Stetigkeit noch Punkte zwischen b und n oder noch Zustände zwischen ab und

und a n sich gedenken lassen, also kann a n noch nicht der nächstfolgende sein, und dieß gilt allemal, so lange noch b n eine angebliche Grösse ist. Daferne also a b der Zustand einer graden Linie, und a n ihr nächstfolgender sein soll, so muß die Differenz beider Zustände b n kleiner als jede angebliche Grösse sein, und man nennt diese das Differential der Linie a b. Also ist das Differential einer Grösse der Unterschied zwischen ihr und ihrem nächstfolgenden Zustande; und eine veränderliche Grösse differentiiren, heißt den Unterschied zwischen ihr und ihrem nächstfolgenden Zustand finden, und solcher ist, wie gezeigt worden, allemal = o, und läßt sich also durch keine endliche Grösse ausdrücken. Da indessen alle Grössen, ehe sie aus einem Zustand in einen andern kommen, zuvor in den nächstfolgenden treten müssen, so ist klar, **daß der Grund der Verschiedenheit der Grössen in dem verschiedenen Uebergang aus jedem Zustand in den nächstfolgenden liegen müsse, daß also erstere vom leztern abhänge.** Demnach können nicht alle Grössen auf einerlei Art aus einem Zustand in ihren nächstfolgenden treten, weil wir sonsten keine verschiedene Grössen haben könnten. Es folgt hieraus dieses: ob sich gleich die Verhältnis eines Zustandes zu dem Unterschied zwischen ihm und der Grösse nächstfolgendem Zustande nicht durch eine endliche Grösse ausdrucken läßt, so müssen doch für mehrere Grössen, die sich in gegebenen Zuständen befinden, die Unterschiede zwischen ihren gegebenen und nächstfolgenden Zuständen d. i.

ihre

ihre Differentialen unter sich eine endliche Verhältnis haben. Es ist dieß, daß Grössen, die für sich durch endliche Grössen nicht bestimmt werden können, doch eine endliche Verhältnis zu einander haben, auch nichts ausserordentliches; so läßt sich z. B. weder $\surd 12$ noch $\surd 27$ in endlichen Grössen bestimmen, und doch ist ihre Verhältnis $= \surd 4 . 3 : \surd 9 . 3 = 2 : 3$ durch endliche Grössen gegeben. Wem es aber auch nicht begreiflich wäre, wie die Differentialien verschiedener Grössen unter sich eine endliche Verhältnis haben können, da sie doch **im strengsten Verstande** $= 0$ sind, der muß doch die Wahrheit des Satzes zugeben, wenn er nicht zugleich einen Satz behaupten will, dessen Ungereimtheit jedem sogleich in die Augen fallen muß, daß wir nämlich **gar keine von einander verschiedene Grössen** hätten.

Nun sei a g eine andere grade Linie aus a gezogen; b d, n e, einander gleichlaufend; $ab = x$, $ad = y$, und $mx = y$, so kommt a d in den Zustand a e, wenn a b in den a n kommt, und es ist selbst die Differenz $de = m . bn$; und da hier überhaupt die beiden Grössen a c, a g nur in Absicht der Grösse verschieden sind, so daß allemal $y : x = m : 1$, so muß auch jeder nächstfolgende Zustand von y, sich zu jedem nächstfolgenden von x verhalten, wie $m : 1$, oder wenn man das Differential mit d bezeichnet, so muß auch

$$dy : dx = m : 1$$

oder $dy = m\,dx$

sein.

sein. Und so sucht man eigentlich nie das Differential einer einzelen veränderlichen Grösse z. E. das von x, das sich nicht anders, als durch $dx = 0$ ausdrucken liesse, sondern allemal das Verhältnis des Differentials einer Grösse zum Differential einer Funktion (*) von ihr, und wer z. B. das Differential von x^2 sucht, fragt eigentlich nach dem Verhältniß desselben zum Differential von x, da für sich betrachtet allemal $d(x^2) = 0$ ist. Man wird leicht sehen, daß das bisherige nur durch die grade Linie ist erläutert worden, nicht aber auf selbige eingeschränkt ist. So ist es allgemein wahr, daß der Grössen in der Gleichung

$$mx = y$$

differential gesetzt, oder die Gleichung $mx = y$ differentiirt, die Differentialgleichung

$$dy = m\,dx$$

giebt. Hätte man die Gleichung $ax = y^2$, so gäbe jedes andere x ein anderes y, aber der nächstfolgende Zustand von ax wäre doch allemal für jedes x der $a(x + dx)$, und jeder nächstfolgende von y der $y + dy$, also von y^2 der $(y + dy) . (y + dy) = y^2 + 2y . dy + dy . dy$;

demnach $ax + a . dx = y^2 + 2y . dy + dy . dy$,

und

(*) Ich nehme diesen Ausdruck hier in der allgemeinsten Bedeutung, da man unter einer Funktion einer Grösse x überhaupt jede Grösse, deren Bestimmung von x abhängt, versteht; daß also z. B. Alg. 78. die Grössen z, z^2, und überhaupt verschiedene Potenzen einer Grösse Funktionen von einander sind.

und

$$a.dx = 2y.dy + dy.dy$$

mithin

$$\frac{a.dx}{dy} = 2y + dy$$
$$= 2y$$

weil dy für sich in der Strenge $= 0$ ist. Also ist

$$a.dx = 2y.dy \text{ oder}$$
$$d(y^2) = 2y.dy$$

Was man sich nun bei dieser Differentialgleichung vorzustellen hat, ist eigentlich dieses: wer weiter nichts zu wissen verlangt, als die absolute Grösse des Differentials von y^2, der erhält die Antwort, es sei $d(y)^2 = 0$, so wie $dy = 0$ ist; wer aber überhaupt nach dem Differential von y^2 fragt, der macht sich schon die Vorstellung, daß, obgleich $d(y^2)$ für sich $= 0$ ist, doch der Uebergang von y^2 in seinen nächstfolgenden Zustand von dem Uebergang von y in seinen nächstfolgenden verschieden sein müsse, weil doch, wie schon die gemeine Algebra lehrt, Wurzeln auf eine andere Art zu- oder abnehmen, als ihre Potenzen, und er sucht daher eigentlich die Verhältnis $d(y^2) : dy$, und findet $d(y^2) : dy = 2y$ oder $d(y^2) = 2ydy$; eigentlich findet sich $d(y^2) = 2y.dy + dy.dy$, also $d(y^2) : dy = (2y + dy) : 1$ d. h. y^2 ist eine solche Funktion von y, daß das Verhältnis beider Differentialen $= (2y + 0) : 1 = 2y : 1$ ist. Bei solchen Betrachtungen fallen dergleichen Einwendungen, wie Hr. Clemm (erste

Gründe

Gründe rc. S. 531. u. f.) macht, von selbsten weg, und sie bleiben von Jemanden, der sie im Ernste macht, nur ein Beweiß von den unrichtigen Begriffen, die man sich von den Differentialen macht, wenn man sie nicht $=0$ setzt; und mich deucht, man habe eben nicht nöthig, eine Rechtfertigung für die Leibnitzische Differentialrechnung auf die Gründe der Newtonischen Fluxionenrechnung zu bauen, wie Hr. Clemm thut a. a. O. S. 532. am Ende.

Da wir schon in der Anal. endl. Gr. gesehen haben, was für eine Menge von algebraischen Linien wir haben, für welche alle sich Gleichungen angeben lassen, so ist es wohl nichts unnützes auf eine Art zu denken, wie man die Natur dieser Linien, genauer als dort geschehen ist, kennen lernen kann. Selbst ausser den krummen Linien giebt es noch Grössen, für die man Gleichungen hat z. E. in der Mechanik, wo von Kräften die Rede ist. Bei dergleichen Dingen nun vermittelst der gegebenen Gleichungen bis ins Innere zu dringen, und die dabei vorkommende Aufgaben, die von der verborgenen Natur der Dinge abhängen, aufzulösen, ist die gemeine Analysis oft unzureichend. Da wird es nothwendig, die Dinge in ihre Elemente zu zerlegen; zu sehen, wie diese mit einander verbunden sind, wie eines aus dem andern erzeugt wird, und wie jedes Ding aus einem Zustande in den andern übergeht. Daß dieses durch das Differentiiren geschieht, ist bisher gezeigt worden, und Anfänger werden sich nun von der Differentialrechnung, welche die Re-

geln, gegebene Grössen zu differentiiren, vorträgt, einen Begrif machen können.

Da von dem verschiedenen Uebergang einer Grösse aus einem Zustande in den nächstfolgenden, also von den verschiedenen Differentialien einer Grösse die Natur dieser Grösse selbst abhängt; so wird man aus vorkommenden Differentialien rückwärts auf die endliche Grössen, denen sie zugehören, schliessen können; dieses ist aber weit schwieriger, als gegebene Grössen zu differentiiren; und der Inbegrif der Regeln, die solches lehren, heißt die Integralrechnung. Beides, die Differential- und Integralrechnung, sind Theile der Analysis des Unendlichen, die im Buche abgehandelt wird.

Es ist zu verwundern, wie Männer, deren tiefe mathematische Einsichten allgemeine Verehrung verdienen, wie Wolf, Wiedeburg u. a. so schlechte Begriffe und Erklärungen in dieser Materie haben geben können. Aus ihnen lernt der Anfänger die wahren Gründe der Differential- und Integralrechnung nimmer kennen, und bekommt sogar von den Differentialien ganz falsche Begriffe. Die Regeln der Differentialrechnung sind nicht im strengsten geometrischen Verstande richtig, daferne die Differentialien nicht im strengsten Verstande $= 0$ sind, weil es z. B. alsdann nur beinahe wahr ist, was zuvor vollkommen richtig folgte, daß $2y + dy = 2y$ sei. Wenn also Wolf (Differentialrechn. §. 6.) und Wiedeburg (IX. Cap. der Differentialrechn. §. 59.) erinnern, daß die Differentialien nur in Anse-

hung

hung der differentiirten Grössen, nicht aber für sich = 0 wären, und wenn ersterer a. a. O. gar noch die Differentialen mit den differentiirten Grössen so vergleicht, wie ein Sandkorn mit einem Berge, und der letztere a. a. O. §. 54. den Unterschied zwischen Chord 36° und Chord 35° 59′ 59″ 59‴ für das Differential der Chord 36° ausgiebt (*) so legen sie dadurch den Grund zu unzähligen Verwirrungen, und sprechen zugleich dem erhabensten Theil der Mathematik das, was sie eben vor andern Wissenschaften schätzbar macht, die geometrische Schärfe ab, und machen ihre Regeln verdächtig, als wären sie nur beinahe wahr, wie es nur beinahe wahr ist, daß ein Berg gleich hoch bleibt, ob man ein Sandkörnchen von seiner Spitze abnimmt, oder drauf liegen läßt. Aus diesem Grunde taugen die ältern Einleitungen in die Analys. des Unendl. zumal für den Anfänger gar nicht, wenn ihm nicht der Lehrer dabei mündlich richtigere Begriffe beizubringen und das Falsche, das in diesen Schriften liegt, vor Augen zu legen weiß. Und leyder! staunt noch oft der Lehrer selbst, wenn er von Unrichtigkeiten hört, die man im Wolfischen Vortrage finden will.

§. 15.

Die Gleichung

$$a^{n-1} Z = z^n$$

 enthält

(*) Eigentlich müßte, wenn der Satz seine Richtigkeit haben sollte, die Reihe 35° 59′ 59″ 59‴ unendlich fortgesetzt werden.

enthält nur deßwegen die Potenz n — 1 der beständigen Grösse a, damit sie auf beiden Seiten gleichviel Abmessungen erhalte. Nun folgt aus dieser Gleichung nach der Voraussetzung (§. 13.) diese:

$$a^{n-1}(Z+E) = (z+e)^n$$

also nach 141.

$$a^{n-1}Z + a^{n-1}E = Z^n + nz^{n-1}e + \frac{n.(n-1)}{1.2} z^{n-2}.e^2 - - - -$$

woraus sich die Gleichung im Buche ergiebt, wenn man durchaus mit e dividirt. Setzt man nämlich a = 1, so giebt sich

$$\frac{E}{e} = nz^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} z^{n-2}.e - - - - -$$

Setzt man statt E, e; dZ, dz, so hat man

$$\frac{dZ}{dz} = nz^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} z^{n-2}\,dz - - - -$$

$$= nz^{n-1} \text{ weil } dz = 0 \text{ ist.}$$

Dieß giebt nun allgemein

$$dZ = nz^{n-1}\,dz, \text{ oder weil } Z = z^n$$

$$d(z^n) = nz^{n-1}\,dz \;(\S.\ 18.)$$

und die Bedeutung hiervon ist eigentlich diese: z ist eine Grösse, die was für einen Werth man will haben kann, eine veränderliche Grösse auf die Potenz n erhoben; sie läßt sich also in mehrern Zuständen gedenken; sie mag indessen sich in einem Zustand befinden,

finden, in welchem man will, so ist sie allemal von ihrem nächstfolgenden Zustand um eine Grösse verschieden, die $= nz^{n-1}\,dz$. Zugleich werden Anfänger hieraus ersehen, warum beständige Grössen keine Differentialien haben; man kann sich selbige nicht in mehrern Zuständen gedenken, und also auch keinen Uebergang aus einem Zustand in den nächstfolgenden oder keine Differentialien. (S. §. 22.)

Und eben aus dieser Ursache muß auch der Gebrauch des Ausdrucks

$$d(z)^n = nz^{n-1}\,dz \;☿$$

nicht weiter ausgedehnt werden, als es die Gründe desselben erlauben; er gründet sich nämlich darauf, daß z^n eine veränderliche Grösse, oder n eine solche Grösse sei, für die z^n veränderlich ist; aber für $n = 0$ ist $z^n = z^0 = 1$ keine veränderliche Grösse mehr, also läßt sich in diesem besondern Fall die Differentialformel ☿ nicht gebrauchen. Für alle andere Fälle aber, wo n eine beständige Grösse ist, ist ihr Gebrauch verstattet, weil übrigens ohne Ausnahme z^n eine veränderliche Grösse ist; und wie man sich in dem nur genannten Fall zu verhalten habe, kommt unten vor (219. IIII.) wo gewiesen wird, daß man $x^{-1}dx$ nicht als das Differential von $\frac{x^0}{0}$ sondern als das Differential von $\frac{\log. x}{a}$ ansehen müsse, wo a eine gewisse beständige Grösse bedeutet. Ausserdem

dem setzt der Beweiß, daß aus der Gleichung $Z = z^n$ die Differentialgleichung

$$dZ = nz^{n-1}\,dz$$

entstehe voraus, daß wenn Z in den Zustand $Z + E$ geräth, z in den $z + e$ gerathe, übrigens aber der Exponent von z, hier n unveränderlich sei. Es kann aber Fälle geben, wo dieser Exponent selbst veränderlich ist; wird z. B. Erl. der Alg. S. 231. §. 576. aus y, $y + E$, so wird aus x, $x + e$. Dieß ist die zwote Gattung von Fällen, wo man die Schlüsse, aus denen die Formel ☿ folgt, nicht anbringen kann. Der Inbegrif der Regeln, wornach man in solchen Fällen sowohl in Ansehung des Differentirens als Integrirens verfahren muß, macht die Exponentialrechnung aus; sie kommt unten vor S. 165. u. folgg.

§. 16.

setzt zum voraus ꝛc. ꝛc. und daß $n > 0$ und unveränderlich sei. s. Erl. zu §. 15.

Ich muß noch erinnern, daß der Hr. Aut. wie überhaupt bei denen im Buche vorgetragenen Lehren der gewöhnliche Vortrag, der so vielen Einwendungen ausgesetzt ist, nach der ihm eigenen Art (S. Alg. §. 214. Erl.) sorgfältig ist vermieden worden, besonders hier das gewöhnliche Verfahren zum größten Vortheil der Gründlichkeit völlig umgekehrt hat.

Der hier nach der strengsten Schärfe erwiesene Satz, daß

$$d\,(z)^n = nz^{n-1}\,dz$$

ist die Fundamentalgleichung der ganzen Differentialrechnung aus der in der Folge (§. 21 - 30.) alle

andere

andere Differentialformeln hergeleitet werden; andere legen den Satz (24.) zum Grunde, und schliesen aus ihm, ohne ihn selbst gehörig erwiesen zu haben, das übrige (S. Erl. zu 24.)

§. 22.

In diesem Verstande rc. rc. Dieses ist eine wichtige Erinnerung. Wer so schlechthin (wie Wolf Differentialrechn. §. 14.) sagt, es sei $da = o$, zeigt, daß er entweder selbst nichts dabei gedacht hat, oder daß es ihm auf Genauigkeit in den Ausdrücken, die hier, ohne Anlaß zu tausend Verwirrungen zu geben, nicht vernachläßigt werden kann, wenig ankomme. Für sich sind *alle* Differentialien $= o$, also auch $dx = o$; wer demnach *in diesem* Verstande $da = o$ setzen wollte, würde das nicht sagen, was der Ausdruck im Buche eigentlich sagen soll, daß nämlich beständige Grössen keine Differentialien haben. (S. §. 15. Erl.)

§. 23.

Man muß diese dritte Art, da Differentialien $= o$ gesetzt werden, von den beiden schon erwähnten wohl zu unterscheiden wissen. Die drei Ausdrücke

1) $da = o$,

2) $dx = o$, $dy = o$,

3) $dx + dy = o$,

sind von einander verschieden, wie ich schon in Ansehung der beiden ersten erwähnt habe. Der dritte Fall, der eine Folge des zweiten sein könnte, steht

mit diesem zweiten hier in gar keiner Verbindung, und rührt hier gar nicht daher, weil die Theile dx, dy, $= 0$ sind, sondern muß so verstanden werden. Weil $x + y$ solche Funktionen von einander sind, die in ihrer Summe allemal die a ausmachen, so muß y abnehmen, wenn x zunimmt und umgekehrt, beide x und y müssen also zwar auf eine gleiche aber doch entgegengesetzte Art aus ihrem jedesmaligen Zustand in den nächstfolgenden übergehen d. h. sie müssen gleiche aber entgegengesetzte Differentialien haben, und in dieser Absicht giebt die Gleichung $x + y = a$, die Differentialgleichung $dx = - dy$, oder

$$dx + dy = 0$$

oder sie machen in ihrer Summe nicht 0 aus, weil die Theile $= 0$ sind, sondern weil sie einander entgegengesetzt sind, und man kann sich die drei Fälle so bemerken

1) $da = 0$, weil es kein da giebt.

2) $dx = 0$, weil sie kleiner als jede angebliche Grösse oder wirklich nichts sind.

3) $dx + dy = 0$, weil sie gleich und entgegengesetzt sind.

Indessen läßt sich der Fall no. 3. als eine Folge von no. 1. ansehen. Weil nämlich $x + y = a$, so muß $d(x + y) = da = 0$ sein, und dieß giebt $dx + dy = 0$.

§. 24. 25.

Der Satz $d(xy) = xdy + ydx$ folgt auf die überzeugenste Art aus (15; 18). Wolf und Wiedeburg

deburg tragen den Satz (25.) vor 15. vor und leiten 15. aus 25. her. Sie setzen nämlich $d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = xdy + y.dx + dx.dy$, und lassen nun, weil nach ihrer Sprache doch dx und dy für sich zwar nicht völlig o aber doch schon gar klein und also $dx.dy$ gar nicht zu rechnen wäre, dieß Produkt $dx.dy$ weg, und behalten nur $d(xy) = xdy + ydx$. Wer so verfährt, giebt auf gradewohl Regeln, die ihren Gründen nach nur beinahe zutreffen könnten, und doch bei ihrer Anwendung, wer weiß woher? aufs schärfste zutreffen. Ich kann mir deßwegen keinen Anfänger vorstellen, der so wenig Denkkraft besitzen sollte, daß ihm bei einem solchen Vortrage nicht Zweifel aufstosen sollten. Wolf fühlt selbst (Alg. §. 90.) die Zweifel, die in seinem Vortrage verborgen liegen, und ohne sie wegzuschaffen, beweißt er nur (Alg. §. 80.), daß seine Regeln Resultate geben, die der geometrischen Schärfe gemäß sind; aber daß dieses so sein muß, und woher es so ist, zeigt er nicht, und läßt dem Anfänger noch immer den Zweifel übrig, ob auch die Regeln bey allen Fällen allgemein in völliger Schärfe richtig sind? Hr. Clemm beweißt eben den Satz, daß $d(xy) = xdy + ydx$ auch vor dem Satz (15.) aus den Gründen der Fluxionenrechnung. (§. 31-45.) Den Namen der Differentialrechnung behält er bei, auch den Buchstaben d, statt dessen man sich in der Fluxionenrechnung des Punkts (.) bedient; nennt aber dx, dy, die Geschwindigkeiten, mit denen sich x, y, ändern, und vermengt auf solche Art Differential- und Fluxionenrechnung mit einander, daß

man

man in der That aus dieser Anleitung die eigentlichen Gründe der Differentialrechnung schlecht kennen lernt, da doch allemal beide Rechnungen in ihren Gründen verschieden sind, ob sie gleich auf einerlei Resultate führen.

Aus dem Satz nun, den diese Schriftsteller zuerst vortragen, folgern sie den (18.) wie sich leicht thun läßt. Es ist nämlich $z^2 = z.z$, also

$$d(z^2) = z\,dz + z\,dz$$
$$= 2z\,dz$$

und so folgt allgemein, daß

$$d(z^n) = d(z.z.z \cdots \text{an der Zahl } n)$$

ein Produkt aus der Anzahl aller z also aus n in das Produkt aller übrigen z also in z^{n-1} in dz multiplicirt, oder daß

$$d(z^n) = n z^{n-1}$$

ist, welches richtig folgt, wenn das erstere richtig und aus Gründen, die der Differentialrechnung eigen sind, zuvor ist erwiesen worden. Daß aber dieses von den erwähnten Männern nicht geschehen ist, ist eben gezeigt worden.

§. 30.

Nach dieser Voraussetzung der allgemeinen Differentialformeln wird es nicht unnüz sein, noch einige besondere Formeln für die Differentialien trigonometrischer Linien zu erwähnen.

I.

Das Differential von $\sin x = \operatorname{Cos} x . dx$

Bew.

Bew. Das Elementardreieck Ddo ist ∾ △ DAE, weil Dod + AED rechte Winkel sind, und ADd oder oDd + oDs = oDs + osD (S. Geom. 13. S. 2. Zus.) folglich oDd = osD = Ase = ADE (S. Geom. 12. S.), mithin

$$AD : AE = Dd : do \text{ oder}$$
$$1 : \operatorname{Cos} x = dx : d \sin x$$
$$\text{und } d \sin x = \operatorname{Cos} x \, . \, dx$$

wo nämlich x sich auf den Bogen bezieht.

II.

$$d \operatorname{Cos} x = - \sin x \, . \, dx$$

Es ist nämlich wieder wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$AD : DE = Dd : Do \text{ oder}$$
$$1 : \sin x = - dx : Do$$

wo $Do = d \operatorname{Cos} x$ ist, also $d \operatorname{Cos} x = - \sin x \, dx$

III.

$$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\operatorname{Cos} x^2}$$

Bew. Weil der Halbmesser AC auf dem unendlich kleinen Bogen CP senkrecht steht (S. Geom. 19. S. 2. Zus.), so ist KCF + FCP = FCP + PFC, folglich PFC = KCF = ACB = ADE, also ist das Elementardreieck PFC ∾ △ ADE, daher

$$CP : CF = AE : AD$$

und die Ausschnitte ADd, ACP geben

Dd:

$Dd : CP = AD : AC$, also
$Dd : CF = AE : AC$, und da ferner
$AE : AD = AB : AC$ also
$AE : AC = AE^2 : AD^2$, folglich weil auch
$AE : AC = Dd : CF$, wird
$AE^2 : AD^2 = Dd : CF$ oder
$\operatorname{Cos} x^2 : 1 = dx : CF = dx : d \operatorname{tang} x$

IV.

$$d \operatorname{cotang} x = \frac{-dx}{\sin x^2}$$

Bew. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke HKI, HAG hat man

$HK : HI = AG : AH$

und die ähnliche Ausschnitte AHK, ADd geben

$Dd : HK = AD : AH$ also
$Dd : HI = AG^2 : AH^2$

und wegen der ähnlichen Dreiecke AGH, Ade

$AG^2 : AH^2 = de^2 : dA^2$ folglich
$de^2 : dA^2 = Dd : HI$ oder
$\sin x^2 : 1 = - dx : d \operatorname{Cot} x$

V.

$$d \sec x = \frac{\operatorname{tang} x \,.\, dx}{\operatorname{Cos} x}$$

Bew. Es ist $\triangle CPF \sim \triangle AFB$, und $Ade \sim \triangle AFB$, also

$Ad : de = CF : PF$

und

und aus III. den Werth von CF $= \frac{dx}{\mathrm{Cos}\,x^2}$ substituirt, giebt

$$1 : \sin x = \frac{dx}{\mathrm{Cos}\,x^2} : PF$$

also PF oder

$$d \sec x = \frac{\sin x \,.\, dx}{\mathrm{Cos}\,x \,.\, \mathrm{Cos}\,x}$$

$$= \mathrm{tang}\,x \,.\, \frac{dx}{\mathrm{Cos}\,x}$$

VI.

$$d\,\mathrm{Cosec}\,x = - \frac{\mathrm{Cosec}\,x\,dx}{\mathrm{tang}\,x}$$

Bew. Die ähnliche Ausschnitte ADd, AKH geben

$$Ad : AH = Dd : HK$$

und die ähnlichen Dreiecke HKI, AGH,

$$AG : (GI = GH\,(*)) = HK : KI,$$

daher, weil $Ad = AG$ ist,

$$AG^2 : AH \,.\, GH = Dd : KI,$$

und weil $AG^2 = BC \,.\, GH$, so giebt sich

$$BC \,.\, GH : AH \,.\, GH = Dd \,.\, KI$$

und

$$BC : (AH = AK = AI\,(*)) = Dd : KI,$$

oder

(*) weil die Differentialien für sich = o sind.

oder

$$\tan x : \operatorname{Cosec} x = -dx : d \operatorname{Cosec} x$$

weil das Differential von x und das von Cosec x einander entgegengesetzt sind.

Aus der ersten und zwoten Formel lassen sich auch die übrigen so herleiten:

$$d \tan x = d \frac{\sin x}{\operatorname{Cos} x}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} x \,.\, d \sin x - \sin x \,.\, d \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x^2}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} x^2 \,.\, dx + \sin x^2 \,.\, dx}{\operatorname{Cos} x^2}$$

und weil nun $\operatorname{Cos} x^2 + \sin x^2 = 1$, so ist

$$\text{III. } d \tan x = \frac{dx}{\operatorname{Cos} x^2}$$

$$\text{IV. } \operatorname{Cot} x = \frac{\operatorname{Cos} x}{\sin x}, \text{ also}$$

$$d \operatorname{Cot} x = \frac{\sin x \,.\, d \operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} x \,.\, d \sin x}{\sin x^2}$$

$$= \frac{-\sin x^2 \,.\, dx - \operatorname{Cos} x^2 \,.\, dx}{\sin x^2}$$

$$= \frac{-dx}{\sin x^2}$$

V. sec

V. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, mithin

$$d \sec x = \frac{\sin x . dx}{\cos x^2}$$

$$= \frac{\tan . x . dx}{\cos x}$$

VI. $\operatorname{Cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, also $d \operatorname{Cosec} x =$

$$= \frac{- dx . \cos x}{\sin x^2}$$

$$= \frac{- dx}{\sin x . \tan x}$$

$$= \frac{- \operatorname{Cosec} x \, dx}{\tan x} \quad (*)$$

Die erwähnten Formeln befinden sich bei Hr. Kies a. a. O. Ausserdem hat sie auch der Hr. Aut. in seinen astron. Abhandl. I. Samml. S. 16. u. folg. beigebracht. Auch findet man ebendas. S. 21. u. folgg. nützliche Differentialformeln für gradlinichte Dreiecke. Man sieht leicht, daß sich dergleichen Formeln auch für Vierecke angeben lassen, wenn man

(*) nicht $\frac{- \sec x . dx}{\tan x}$ wie bei Hrn. Kies a. a. O. verdruckt ist.

man in einer Gleichung zwischen 6 Stücken eines Vierecks eine und die andere Grösse als veränderlich ansieht, die übrigen aber als unveränderlich.

Ex. In dem Viereck (Fig. 3.) sind die vier Seiten nebst den beiden gegenüber stehenden Winkeln ω, ψ, gegeben; man soll die Verhältnis finden, nach der sich die zwo gegenüber stehende Seiten a, b, verändern, wenn alles übrige unverändert bleibt, oder man soll unter dieser Voraussezzung die Verhältnis der Veränderung von a zur Veränderung von b bestimmen.

Aufl. Es ist bekanntlich

$$A^2 + a^2 - 2Aa.\mathrm{Cos}\,\omega = B^2 + b^2 - 2Bb.\mathrm{Cos}\,\psi$$

also alles unverändert gelassen, und blos a, b als veränderlich angesehen, giebt differentiirt

$$2ada - 2A.\mathrm{Cos}\,\omega.da = 2bdb - 2B.\mathrm{Cos}\,\psi.db$$

oder

$$(a - A.\mathrm{Cos}\,\omega).da = (b - B.\mathrm{Cos}\,\psi).db$$

folglich die gesuchte Verhältnis

$$\frac{da}{db} = \frac{b - B.\mathrm{Cos}\,\psi}{a - A.\mathrm{Cos}\,\omega}$$

und so liessen sich aus andern tetragonometrischen Aufgaben ähnliche Fragen beantworten, womit ich mich aber hier nicht aufhalten kann.

§. 31.

Man wird die hier eingeschalteten Säze besser verstehen, wenn man zuvor was Hr. Clemm a. a. O.

§. 201.

§. 201. davon in der Kürze mit besonderer Deutlichkeit sagt, nachliest. Und damit ich nicht Anfänger auf ein Buch zu verweisen nöthig habe, das sie vielleicht nicht besitzen, so wird es mir verstattet sein, diesen §. statt einer Erläuterung herzusetzen:

Man kann die Fluxionenrechnung nach der Bedeutung des Namens, den die Engländer dieser Rechnung geben, am besten dadurch beschreiben, wann man sagt, sie bestehe in der Kunst, die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher sich eine gegebene Figur ändert.

So richtig dieser Begrif ist, so schwer scheint er besonders für Anfänger zu sein. Wir wollen uns dahero bemühen, ihn auf der leichtesten und faßlichsten Seite vorzutragen.

Der grosse Analyste, Maclaurin, welcher als ein zweiter Archimedes die Schottländische Vestung Edinburg wider die mißvergnügten Schotten im Jahr 1746. vertheidigte, und überhaupt durch seine gemeinnützige Arbeiten und Schriften sich einen unsterblichen Ruhm erworben, hat uns zu dieser Erklärung in seinem vortreflichen Buch unter dem Titel: Treatise of fluxions, Anleitung gegeben.

Man betrachte (Fig. 4.) das Viereck ABCD, und setze AD = x, DC = y; vx bedeute die Geschwindigkeit des Punkts D, bei Beschreibung der Linie AD; und vy die Geschwindigkeit des Punkts C, indem er die Linie DC beschreibet. Nach Verfliessung einer willkührlichen Zeit, die endlich sein

mog, seie aus AD . Ai; und aus DC . Df oder ig geworden. Jezo suche man die Geschwindigkeit, mit welcher das ganze Rectangulum sich verändert hat; das Rectangulum selbst heißt AD . DC = xy. Nun fragt man, wie geschwinde DC = y fortrüken müsse, daß die Gleichheit immer bleibe, oder daß in unendlich kleinen Zeittheilen wie in grössern das wachsende Rectangulum AC sich immer ähnlich bleibe, so wird man antworten: mit der Geschwindigkeit des Punkts D = vx, eben so wird sich die Linie AD = BC = x, die sich zu Erhaltung der Aehnlichkeit nach ef bewegt, mit der Geschwindigkeit des Punkts C = vy bewegen müssen, demnach ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das ganze Rectangulum verändert v(xy) = y . vx + xvy. Dann wenn sich diese beide Linien mit einer andern Geschwindigkeit bewegten, so würde die eine früher oder später als die andere an den Ort und Stelle, wohin man sie haben will, kommen, folglich die Aehnlichkeit, welche auch in dem kleinsten Zeitpunkt der Veränderung erhalten werden muß, unterbrochen werden.

Wenn sich aber AD mit der Geschwindigkeit von DC, und DC mit der Geschwindigkeit AD, d. i. x mit der Geschwindigkeit von y, und y mit der Geschwindigkeit von x bewegt, so bleibt das Rectangel immer sich selbst gleich, und dem noch nicht veränderten in einem jeden Zeitpunkt der Veränderung ähnlich, demnach ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Rectangel xy verändert, xvy + yvx, ohne daß man nöthig hätte, etwas entweder

als

als unendlich klein anzusehen, oder wegzuwerfen, oder gar für ein absolutes Nichts zu halten (wie doch die Differentialen in der That sind L.). Wären die Linien AD und DC einander gleich, so ist $x = y$, folglich $xy = x^2$, dahero in diesem Fall die Veränderung des Quadrats $xvx + xvx = 2xvx$ u. s. w. Nun hat man in Teutschland den Raum, der sich mit dieser Geschwindigkeit verändert, nicht mit dem Buchstaben v sondern d ausgedruckt, und eine Differentialgrösse genannt; dahero $xvy + yvx$ bei uns ausgedruckt wird durch $xdy + ydx$, und $2xvx$ heißt $2xdx$ u. s. w.

Herr Clemm hätte nur diesen §. etwas anders vortragen, und ihn nicht so einkleiden sollen, als wenn wir unsere Differentialrechnung von den Engländern entlehnt, und nur andere Namen eingeführt hätten. (s. Fig. 5.)

§. 39.

Zu II.

Es folgen nämlich aus den Werthen für EK und ES (in I.) Werthe für x^n — EK, oder EL — EK = KL, und für ES — x^n oder ES — EL = LS, welches die Gleichungen für KL und LS giebt.

beschleunigt oder gleichförmig ist 2c. Es ist dieses so ein Satz wie der in der gemeinen Algebra: in einer Reihe von Potenzen sind die folgenden Glieder von den vorhergehenden, oder die höhern von den niedern immer mehr und mehr von einander verschieden, oder sie nehmen ungleichförmig

zu, wenn gleich ihre Wurzeln gleichförmig zunehmen. Ein Beispiel für $n = 2$ giebt Alg. 42. wo S. 22. die zwote Columne, als die Reihe der ersten Unterschiede der Quadrate, selbst eine arithmetische Reihe ist, da hingegen der Wurzeln Unterschiede durchaus $= 1$ ist. Ein Beispiel für $n = 3$ findet sich Alg. 48.

Zu VIII.

Es zeigt sich hier die Aehnlichkeit der Fluxionenrechnung mit der Differentialrechnung, da in der That die Verhältnis der Geschwindigkeit, mit der sich einander zugehörige oder von einander abhängende ausgedehnte Grössen verändern, so was ist, wie die Verhältnis, mit der veränderliche Grössen, die von einander abhängen, aus jedem Zustand in den nächstfolgenden übergehen; und da man nie mit den Fluxionen oder Differentialen selbst, sondern nur mit ihren Verhältnissen rechnet, so zeigt dieß, warum beide Rechnungen einerlei Resultate geben.

§. 46.

Die Gleichung

$$(1 + y)^m = \omega$$

differentiirt giebt

$$m (1 + y)^{m-1} dy = d\omega, \text{ also}$$

$$m . (1 + y) . (1 + y)^{m-1} dy = m . (1 + y)^m dy$$
$$= (1 + y) . d\omega$$

Nun ist $(1 + y)^m = \omega$, folglich

$$m\omega dy = (1 + y) . d\omega \text{ und}$$

mω

$$m\omega = \frac{(1+y).d\omega}{dy}$$

oder $\frac{(1+y).d\omega}{dy} - m\omega = 0$ (R

Diese Gleichung durch die anfangs angenommene unendliche Reihe auszudrucken, suche man zuerst $d\omega$ aus der Gleichung

$1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \text{---} + Py^n + Qy^{n+1}$
$+ \text{---} = \omega$ (M

so erhält man

$d\omega = Ady + 2Bdy + 3Cy^2dy + 4dy^3dy \text{---}$
$\text{---} + nPy^{n-1}dy + (n+1)Qy^n dy \text{---}$

und

$\frac{d\omega}{dy} = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 \text{-----}$
$\text{---} + nPy^{n-1} + (n+1).Qy^n \text{---}$

Dieses mit $1+y$ multiplicirt, giebt

$\frac{(1+y).d\omega}{dy} =$

$A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 \text{---} + nPy^{n-1} + (n+1)$
$Qy^n \text{----}$

$+ A + 2B + 3C \text{--------} + nP \text{---}$ (S

und die Reihe (M) mit $-m$ multiplicirt, giebt

$-m\omega = -m - mAy - mBy^2 - mCy^3 \text{----}$
$mPy^n \text{----}$ (T.

Substituirt man demnach in R die Werthe aus S und T, so erhält man, wenn die Coefficienten gehörig zusammen geschrieben werden

$$\begin{array}{l} A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 \ldots + (n+1)Qy^n \ldots = 0 \\ -m + A + 2B + 3C \quad + nP \\ \quad -mA - mB - mC \quad - mP \end{array}$$

Nun ist die Summe der zu jeder Potenz von y gehörigen Coefficienten allemal $= 0$ (Alg. 624.), folglich

$$A - m = 0$$

$$2B + A - mA = 0$$

$$3C + 2B - mB = 0.$$

$$\vdots$$

$$(n+1) . Q + nP - mP = 0$$

oder

$$1.)\ A = m$$

$$2B = mA - A, \text{ mithin}$$

$$2.)\ B = \frac{(m-1) . A}{2}$$

Ferner $3C = mB - 2B$, also

$$3.)\ C = \frac{(m-2) . B}{3}$$

Eben so

$$(n+1) . Q = mP - nP$$

Folglich

$$4.)\ Q = \frac{(m-n) . P.}{n+1}$$

u. s. w.

§. 49.

§. 49.

Daß die Potenz n von $a + b$ folgende Gestalt haben muß

$$a^n + A a^{n-1} b + B a^{n-2} b^2 \text{----} \quad (Q$$

läßt sich leicht darthun; wie sich nun hier die Coëfficienten A, B u. s. w. aus der Lehre von den Combinationen bestimmen lasse, läßt sich auf folgende Art erkennen: Jedes Glied der Reihe Q enthält ohne den Coëfficienten ein Produkt aus n Buchstaben; heißt nämlich das Glied, dessen Coëff. A ist, das erste, so sieht jedes rte Glied ohne den Coëfficienten so aus:

M)

$a.a.a.a$---- an der Zahl $n - r$, multiplicirt mit $b.b.b.b$---- an der Zahl r.

Nun läßt sich aus der Art, wie höhere Potenzen durch die Multiplication entstehen, zeigen, daß die Multiplication

$$(a + b).(a + b).(a + b) \text{----} \text{ an der Zahl } n$$

das Produkt aus $a.a.a$--- a. d. Z. $n - r$ in $b.b.b$--- a. d. Z. r auf alle mögliche Arten giebt, die sich gedenken lassen (so wie für $n = 2$ das Produkt aus a in b in der Potenz $(a + b)^n$ auf die beiden Arten ab und ba vorkommt) d. h. mit andern Worten, das Produkt aus $a.a.a$--- a. d. Z. $n - r$ in $b.b.b$--- a. d. Z. r kommt in der Potenz n von $a + b$ so oft vor, als sich diese beide Grössen unter einander versetzen lassen, also so oft, als in dem Produkt von n Buchstaben (M) die $n - r$ Stellen

von a, oder welches einerlei geben muß, die r Stellen von b sich verwechseln lassen; und da dieß nach (Alg. 740.)

$$\frac{n.(n-1).(n-2)----.(n-r+1)}{1 . 2 . 3 ------- . r} \text{ mal}$$

angeht, so enthält jedes rte Glied in Q das Produkt M,

$$\frac{n.(n-1).(n-2)----.(n-r+1)}{1 . 2 . 3 ------- . r} \text{ mal,}$$

folglich ist in der Potenz n von a + b jedes rten Glieds Cöefficient =

$$\frac{n.(n-1).(n-2)----.(n-r+1)}{1 . 2 . 3 ------- . r}$$

indessen rechtfertigt dieser Beweiß die Erweiterung des Satzes und die Anwendung auf gebrochene und verneinte Exponenten nicht. S. Eul. vollst. Anleit. zur Alg. I. Th. IIter Abschn. 11tes Cap.

§. 56.

Wie man sich in besondern Fällen der Multiplication bedienen könne, habe ich (Alg. 625. das. Erl.) gewiesen. Hier ist die Absicht, ein allgemeines Verfahren anzugeben, wie sich allemal die folgenden Glieder jeder Potenz einer Reihe, die aus einer unbestimmten Menge von Gliedern besteht, aus den vorhergehenden berechnen lassen.

Setzt man nun die Reihe = 1 + y, so erhellet aus (46. I.), daß sich die Potenz m von ihr mit 1. anfan-

anfangen muß; ausserdem aber ist klar, daß alle Potenzen von z nach der Reihe in der Potenz m von $1+y$ vorkommen müssen, und daß also ihre Potenz diese Gestalt haben muß:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 \text{-----}$$

wo es nur drauf ankommt, die Coëfficienten zu bestimmen. Nun ist die Differentialgleichung von $1+y = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$ diese

$$dy = \alpha dz + 2\beta z dz + 3\gamma z dz \text{----},$$
$$= (\alpha + 2\beta z + 3\gamma z^2 \text{----}).dz$$

Aus II. folgt nun weiter

$$\frac{d\omega}{dz} = A + 2Bz + 3Cz^2 \text{----}$$

folglich, da

$$1 + y = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 \text{----}$$

so erhält man

$$(1+y).\frac{d\omega}{dz} = (1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 \text{----}) \times (A + 2Bz + 3Cz^2 \text{----}) \quad P.)$$

$$\begin{aligned}= A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 \\ + A\alpha + 2B\alpha + 3C\alpha + 4D\alpha \\ + A\beta + 2B\beta + 3C\beta + \\ + A\gamma + 2B\gamma \\ + A\delta \\ + 6Fz^5\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllll}
+6Fz^5 \text{-----} & & & & \\
+5Ea \text{-----} & & & & \\
+4D\beta & +5E\beta z^6 \text{-----} & & & \\
+3C\gamma & +4D\gamma & +5E\gamma z^7 \text{----} & & \\
+2B\delta & +3C\delta & +4D\delta & +5E\delta z^8 \text{----} & \\
+A\varepsilon & +2B\varepsilon & +3C\varepsilon & +4D\varepsilon & +5E\varepsilon \text{--}
\end{array}$$

u. s. w.

$$\begin{array}{llll}
= A + A\alpha . z & + A\beta . z^2 & + A\gamma . z^3 \\
+ 2B & + 2B\alpha & + 2B\beta \\
 & + 3C & + 3C\alpha \\
 & & + 4D
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
+ A\delta . z^4 & + A\varepsilon . z^5 \text{----} & \quad Q.) \\
+ 2B\gamma & + 2B\delta & \\
+ 3C\beta & + 3C\gamma & \\
+ 4D\alpha & + 4D\beta & \\
+ 5E & + 5E\alpha & \\
 & + 6F &
\end{array}$$

Nun ist überdas $(1 + y) . \frac{d\omega}{dz} = \frac{m\omega dy}{dz}$ vermöge (I.), man suche daher auch die ersten Glieder der Reihe, in die sich $\frac{m\omega dy}{dz}$ verwandlen läßt, indem man aus (I. und II.) die Werthe von ω und $\frac{dy}{dz}$ substituirt;

dieß

dieß giebt $(1+y) . \frac{d\omega}{dz} = \frac{m\omega dy}{dz} =$

$m.(1+Az+Bz^2+Cz^3---).(\alpha+2\beta z+3\gamma z^2$
$+4\delta z^3----)$ R.)

wo man nur, eine Gleichung wie Q zu erhalten, die lateinischen und Griechischen Buchstaben gehörig mit einander verwechseln darf, nämlich A mit α, B mit β, C mit γ u. s. f. und was auf diese Art herauskommt, überall mit m multipliciren muß, wie aus R mit P verglichen erhellet. So giebt sich

$$(1+y) . \frac{d\omega}{dz} = \frac{m\omega dy}{dz}$$

$$\begin{array}{lllll} = m\alpha & +2m\beta.z & +3m\gamma\ z^2 & +4m\delta.z^3 & +5m\varepsilon.z^4--- \\ +mA\alpha & +2mA\beta & +3mA\gamma & +4mA\delta & \\ & +mB\alpha & +mB\beta & +3mB\gamma & \\ & & +mC\alpha & +2mC\beta & \\ & & & +mD\alpha & \end{array} \quad S.)$$

Man hat also hieraus und aus Q

$$\begin{array}{llll} A & +2B.z & +A\beta.z^2 & +A\gamma.z^3----- \\ -m\alpha+A\alpha & +2B\alpha & -2B\beta & \\ & -2m\beta & +3C & +3C\alpha \\ & -mA\alpha & -3m\gamma & +4D \\ & & -2mA\beta & -4mD \\ & & -mB\alpha & -3mA\gamma \\ & & & -mB\beta \\ & & & -mC\alpha \end{array} \quad =0;$$

Folglich

Folglich nach (Alg. 624.)

$$A - m\alpha = 0,$$

$$2B + A\alpha - 2m\beta - mA\alpha = 0$$

u. s. w.

wodurch sich die Werthe der Coefficienten A, B, C--- ergeben. Man wird hieraus wie (VI. VII.) das Gesetz, so diese Coefficienten beobachten, muthmassen, und diese Vermuthung auf folgende Art rechtfertigen.

Man suche in dem Werth von $(1+y) \cdot \frac{d\omega}{dz}$ oder in der Reihe, die man nach VIII. ausgedruckt für $(1+y) \cdot \frac{d\omega}{dz}$ statt Q erhält, den zu einer gewissen Potenz von z z. B. zu z^n gehörigen Coefficienten, und eben so in dem Werthe von $\frac{m\omega dy}{dz} = \frac{(1+y).d\omega}{dz}$, oder in der Reihe, die man nach VIII. ausgedruckt für $\frac{m\omega dy}{dz}$ statt der Reihe S erhält, suche man den zu eben der Potenz z^n gehörigen Coefficienten, oder man suche nach (IX. u. X.) den Coefficienten der Produkte $\frac{(1+y).d\omega}{dz}$ u. $\frac{\omega dy}{dz}$ zu z^n, und multiplicire jedes Glied des letztern mit m, welches das vorige ist. Dadurch ergeben sich zweene Ausdrücke für eben den Coefficienten, welche einander gleichgesetzt eine Gleichung in XI. geben, woraus man den Werth von

von $L(n+1)$ oder von dem Coëfficienten der zunächst höhern Potenz von z findet, wie in VII. vermuthet wurde. Die Gleichung (Q.) $L(n+1) = ((m-n) Ln . \lambda 1 ----) : (n+1)$ enthält nämlich den Werth jedes $n+1$ten Coëfficienten der Potenz m von der Reihe $(1+y)$, daß sich also alle Coëfficienten der Potenz der 1te, 2te, 3te u. s. w. nach der Reihe ergeben, wenn man in Q statt n, nach und nach $0, 1, 2, 3 ----$ setzt, denn den Coëfficient des Glieds, das vor Az vorausgeht, weiß man ohnehin, da solches allemal $= 1$, folglich $L\,0 = 1$ ist, so wie $L-1$, $L-2$ u. s. w. nothwendig $= 0$ sein müssen.

Auf solche Art läßt sich also jede Potenz einer unendlichen Reihe, wie die gegebene ist, so weit man will, ausdrucken; und wenn eine unendliche Reihe gegeben wäre, die von der vorigen verschieden wäre, so müßte man ihr zuvor eine der vorigen ähnliche Gestalt geben, und darauf auf die gewiesene Art verfahren.

Man betrachte nämlich die allgemeinste Reihe (XV.)

$$\pi u^{e} + \alpha u^{e+\omega} + \beta u^{e+2\omega} ---- \quad M.)$$

Diese auf die Gestalt der Reihe

$$1 + \alpha z + \beta z^{2} + \gamma z^{3} ----- \quad N.)$$

zu bringen, setze man statt ihrer

$$\pi u^{e} . \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} u^{\omega} + \frac{\beta}{\pi} u^{2\omega} -----\right)$$

Sollen

Sollen nun hier die Potenzen wie in (N.) auf einander folgen, so darf man nur $u^{\omega} = z$ setzen; dieß verwandelt die Reihe M in folgende

$$\pi z^{e:\omega} . \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} z + \frac{\beta}{\pi} z^2 + \frac{\gamma}{\pi} z^3 - - - -\right)$$

Ex. Die ersten Glieder der Potenz

$$(2u^2 + 4u^5 + 6u^8 + 8u^{11} - - - -)^2$$

zu finden. Hier ist $\pi = 2$, $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $\gamma = 8 - - - -$, $e = 2$, $\omega = 3$, und $m = 2$, also ist die Reihe mit dieser einerlei

$$(2z^{\frac{2}{3}})^2 . (1 + 2z + 3z^2 - - - -)^2 =$$

$$= (4\sqrt[3]{z^4}) . (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 - - - -)^2 \text{ R.)}$$

wo die Coëfficienten der Reihe mit (N.) verglichen folgende sind

$1 = 1$

$\alpha = 2$

$\beta = 3$

$\gamma = 4$

u. s. w.

Man hat demnach

$$L0 = 1$$

$$L1 = 2\alpha = 4 = A$$

$$L2 = \frac{A\alpha}{2} + 2\beta = \frac{4 \cdot 2}{2} + 2 . 3 = 10 = B$$

$$L3 = A\beta + 2\gamma = 4 \cdot 3 + 8 = 20 = C$$

$$L_4 = \frac{5A\gamma + 2B\beta - C\alpha}{4} + 2\delta$$

$$= \frac{5.4.4 + 2.10.3 - 20.2}{4} + 2.5 = 35 = D$$

u. s. w.

und diese Coëfficienten in die Reihe von R statt der dortigen gesetzt, und gleich mit $4\sqrt[3]{z^4}$ multiplicirt, giebt den Anfang der gesuchten Potenz =

$$4\sqrt[3]{z^4} + 16\sqrt[3]{z^7} + 40\sqrt[3]{z^{10}} + 80\sqrt[3]{z^{13}} + 140\sqrt[3]{z^{16}} \ldots$$

oder statt z, u^3 gesetzt, giebt $(2u^2 + 4u^5 + 6u^8 + 8u^{11})^2 = 4u^4 + 16u^7 + 40u^{10} + 100u^{13} + 140.u^{16} \ldots$

Dieses Beyspiel dient nur, die Anwendung des vorhergehenden allgemeinen Satzes zu zeigen, nicht die Bequemlichkeit oder Kürze der Rechnung zu beweisen, weil in der That in diesem Fall das gewöhnliche Verfahren durch die Multiplication kürzer gewesen wäre. Indessen kann es doch Fälle geben, da das hier gezeigte Verfahren dienlich ist z. B. wenn m ein Bruch ist, wie unten (124.)

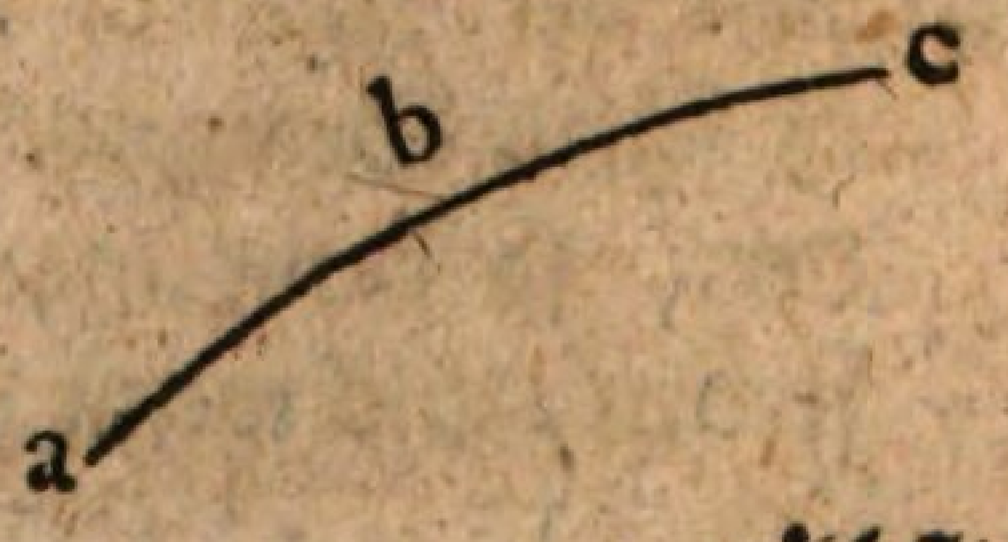
§. 64.

Wolf druckt sich hierüber so aus:

„Weil der Punkt, so die krumme Linie beschreibt, in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert, so kann man sich die krummen Linien vorstellen, als wenn sie aus unendlich kleinen geraden

den Linien zusammengesetzt, und daher ein Polygon von unzählig unendlich kleinen Seiten wären. Wenn ihr nun setzet, daß eine von diesen Seiten in eine endliche gerade verlängert wird; so ist selbige der Tangens der krummen Linie." (Differentialrechn. §. 28.)

Dieß stimmt freilich mit seiner Theorie von den Differentialen völlig überein. Wer sich aber die Sache so vorstellt, und sich eine krumme Linie aus unzählig kleinen graden Theilen zusammengesetzt gedenkt, der gründet die erhabensten Lehren der Mathematik auf falsche Vorstellungen. Wenn sich ein Ganzes aus Theilen zusammensetzen läßt, so müssen diese Theile, so klein sie auch immer sind, doch noch angebliche Grössen sein; und krumme Linien sind doch eben solche, von denen kein Theil gerade ist (6. Erklär. Geom.) also ist es falsch, sich eine krumme Linie als aus unzählig kleinen geraden zusammengesetzt zu gedenken. So irrig stellte sich Antiphon ein Alter, der sich um die Quadratur des Kreises bemühte, die Sache vor, und Sturm urtheilt deßwegen von ihm, er habe wohl verdient: vom Aristoteles gepeitscht und durchgezogen zu werden. S. Hrn. Karstens Beiträge zur Aufnahme der theor. Mathem. S. 14. u. f. Was man sich also bei dem Satze, daß die krumme Linie aus unendlich kleinen graden Linien bestehe, zu gedenken hat, ist dieses: der Punkt, der die krumme Linie a c beschrieben hat, kommt aus dem Zustand a b in den



nächst-

nächstfolgenden, aus diesem wieder in den nächstfolgenden u. s. w. Dergleichen Uebergänge aus jedem Zustand in den nächstfolgenden müssen nun im strengsten Verstande **unendlich viele** sein, und wenn man die Unterschiede eines jeden Zustandes von dem nächstfolgenden, also die Differentialien **Elemente** der krummen Linie nennen will, so sind diese Elemente in der Strenge = o, und man kann also dergleichen Elemente **grad** nennen, wie es verstattet ist, sie krumm zu heissen.

§. 66.

und folglich kann ꝛc. ꝛc. (Fig. 6.) LM nähert sich nämlich unendlich der MT, und weil MH eine grade Linie zwischen MV und dem Bogen MN sein soll, so nähert sich die Sehne MN unendlich der MH; und also ist die Gränze, der sich der Winkel LMN unendlich nähert = TMH = hMH — hMT = 2R — VMH ꝛc. welches so lange wieder 63 ist, bis VMH verschwindet, welches unmittelbar den folgenden Zusatz giebt. (*)

§. 68.

S. Erl. zu §. 64.

§. 77.

daß N unendlich nahe bei M ist ꝛc. ꝛc. oder daß für die krumme Linie CMN, AQ der zunächst

 folgende

(*) Zur Deutlichkeit ist die Figur hier so beigezeichnet worden, wie sie im Buche eigentlich aussehen sollte.

folgende Zustand der Abscisse AP, und daher QN der nächstfolgende der Ordinate PM ist, so sind die Unterschiede MS, NS die Differentialien von AP, PM;

Die Gleichung

$$PT : y = dx : dy$$

sagt eigentlich folgendes: Die nächstfolgende Zustände der Subtangente und zugehörigen Ordinate verhalten sich allemal wie der zugehörigen Abscisse und Ordinate ihre Unterschiede von ihren nächstfolgenden Zuständen. Hat man nun für eine krumme Linie eine Gleichung zwischen x und y, so macht man aus ihr eine Differentialgleichung, in der also nothwendig dx und dy vorkommen muß, und sucht nun aus dieser Gleichung zwischen dx und dy, den Werth des Quotienten $\frac{dx}{dy}$ nach den gewöhnlichen Regeln der gemeinen Analysis, wovon gleich nach 83. Beispiele vorkommen. Es läßt sich also auf solche Art aus jeder Gleichung für eine krumme Linie allemal eine für die Subtangente herleiten. Wie nun in der Trigonometrie Sinus, Tangenten, Secanten &c. &c. alle Funktionen von einander sind, wovon eine einzige alle die übrigen bestimmt (*), so sind hier Abscissen, Ordinaten, Tangenten, Subtangenten, Normalen &c. &c. auch alle Funktionen von einander, wovon

(*) S. Hrn. Funks Dissertation unter dem Titel: Methodus ex data linea trigonometrica angulum definiente inueniendi reliquas. Lips. 1770.

wovon jedesmal eine die übrigen alle bestimmet; und da sich die ganze Lehre, wie sich aus der Gleichung für eine krumme Linie Gleichungen für die genannten Linien herleiten lassen, auf den Begrif von der Tangente und Subtangente (§. 63-77.) gründet, so nennt man sie sonsten methodum tangentium directam (*) von der hier bis §. 92. gehandelt wird; so wie umgekehrt die Lehre, welche die Regeln enthält, wie sich aus den gegebenen Eigenschaften dieser Linien eine Gleichung für die krumme Linie selbst finden läßt, die methodus tangentium inuersa genannt wird, wovon unten (§. 262-265.) etwas vorkommt.

§. 78.

Triangul. characterist. ꝛc. ꝛc. Es kommt nämlich bei der Natur krummer Linien auf die beiden Catheten MR, mR an, welche die Verhältnis anzeigen, nach der Abscissen und Ordinaten in ihre folgende Zustände übergehen, und worin eben das Characteristische oder der einzige Grund der Verschiedenheit aller krummen Linien liegt, wie schon im Vorhergehenden ist erwähnt worden.

(*) In Hubens anal. Abhandl. von den Kegelschn. und den obigen Erläuterungen darüber wird man diese Lehre auf die Kegelschnitte nach der gemeinen Analysis vollständig, obgleich in der Kürze, angewandt finden, und es wird Anfängern zu einiger Befriedigung gereichen, wenn sie zwischen denen Sätzen hier, und den dortigen die genaueste Uebereinstimmung bemerken.

§. 81.

so wäre der Quotient ꝛc. ꝛc. Ihre Differentialien wären nämlich einander entgegengesetzt, wie in (23.)

§. 82.

(Fig. 7.) Zwo entgegengesetzte Ordinaten CN, Cn haben allemal die zugehörige Subtangente CB mit einander gemein; es gilt also in Absicht auf die Bestimmung der Subtangente gleich viel, ob die Ordinate bejaht oder verneint ist; auch erhellet solches aus der Gleichung für sie

$$\text{Subt} = \frac{y \,.\, dx}{dy}$$

die sich für ein verneintes y in die

$$\text{Subt} = \frac{-y \,.\, dx}{-dy} = \frac{y \,.\, dx}{dy}$$

verwandelt, und also ungeändert bleibt; ich schliese hieraus, daß im Buche von 80. bis 83. nur ein Versehen muß sein begangen worden, und daß man statt Ordinate überall Absciße lesen müsse, wie ich es im angehängten Verzeichnis der Druckfehler, das sich aber auf die zwote Ausgabe, der ich mich hier bediene, bezieht, bemerkt habe. Es enthalten übrigens die beiden Sätze 81; 82; alle verschiedene Fälle, die sich bei der Gleichung

$$\text{Subt} = \frac{y \,.\, dx}{dy}$$

gedenken lassen, nämlich

1) Für

1) Für ein bejahtes x und homogene Differentialien (*) ist

$$\text{Subt} = \frac{y \cdot dx}{dy}$$

bejaht §. 80.

2) Für ein verneintes x und homogene Differentialien

$$\text{Subt} = \frac{y \cdot (-dx)}{dy} = \frac{-y \cdot dx}{dy}$$

verneint §. 82.

3) Für ein bejahtes x und heterogene Differentialien

$$\text{Subt} = \frac{y \cdot dx}{-dy} \text{ oder } \frac{y \cdot (-dx)}{dy}$$

$$= \frac{-y \cdot dx}{dy}$$

verneint §. 81.

4) Für ein verneintes x und heterogene Differentialien

$$\text{Subt} = \frac{y \cdot (-dx)}{-dy} \text{ oder } \frac{y \cdot (-(-dx))}{dy}$$

$$= \frac{y \cdot dx}{dy}$$

bejaht §. 82.

(*) ich verstehe hierunter solche, die einander nicht entgegengesetzt sind.

§. 84.

Es giebt sich hieraus

$$\text{Tang } TM = \surd(TP^2 + PM^2) = \surd(4x^2 + ax)$$

$$= 2x\surd\left(1 + \frac{a}{4x}\right)$$

§. 85.

Jeder aber wird ꝛc. ꝛc. Es kommt auf folgende Fälle an. Weil x und y hier allemal homogene Differentialien haben, so ist

I. für ein bejahtes x die Subtangente bejaht (82. 1.)

II. für ein verneintes das > a ist, wird

$$\text{Subt} = \frac{-2x.(a-x)}{a-2x}$$

wo a — x verneint, also der Zähler bejaht und Nenner verneint ist, folglich die Subt. selbst verneint, wie in (82. 2.) und liegt also mit der Absciſſe auf einer Seite der Ordinate nach 83.

III. für ein verneintes x das = a ist, wird

$$\text{Subt} = 0$$

wie für die Ellipse.

IV. für ein verneintes x das < a ist, gäbe die Gleichung $\text{Subt} = \frac{-2x(a-x)}{a-2x}$ drei Fälle

1) für

1) für $x < \frac{1}{2}a$, bleibt $a - 2x$, also auch $a - x$ bejaht, und daher die Subtangente verneint.

2) Für $x > \frac{1}{2}a$ ist $a - x$ bejaht, $a - 2x$ verneint, also $\frac{a - x}{a - 2x}$ verneint, und $\frac{-2x.(a - x)}{a - 2x}$ bejaht, welches dem Satz 4. §. 82. gemäß ist, weil für solchen Fall nach der Gleichung für die Hyperbel jedem grössern x eine kleinere Ordinate zugehört, also x und y heterogene Differentialien haben.

3) Für $x = \frac{1}{2}a$ wird Subt $= \frac{-ax}{o} = -\infty$ wieder dem 82. §. no. 4. gemäß, weil die Differentialien von x und y von da an einander entgegengesetzt oder heterogen werden.

Aber diese 3 Unterabtheilungen des IVten Falls sind unnütze, da für $-x < a$, y folglich auch dy und daher der ganze Werth $\frac{y.dx}{dy}$ oder die Subtangente unmöglich ist. Man kann sie indessen in eben dem Verstand, wie die kleine Axe (Erl. zu 401. Alg.) als möglich betrachten. In solchem Fall darf man nur die beiden entgegengesetzten Theile der Hyperbel durch eine Ellipse, deren grosse Axe a und kleine $\sqrt{ab}$ ist, mit einander verbinden, und solche als den Theil der Hyperbel, der den verneinten $x < a$ zugehörte, ansehen, so werden die drei Gattungen des vierten Falls ihre Anwendung haben.

Im Grund giebt es also für die Hyperbel nicht mehrere Fälle zu unterscheiden, als für die Ellipse, da der IIIte auch von der Ellipse gilt, und der IVte eigentlich der Natur der Hyperbel gemäß keine Subtangente giebt. Und der Umstand, daß x hier ohne Ende wachsen kann, trägt zu der Mannigfaltigkeit der Fälle gar nichts bei.

§. 97.

Aus $(b+x).z = yx$ folgt

$$(b+x).dz + zdx = ydx + xdy$$

also

$$(b+x).dz = (y-z).dx + xdy$$

mithin

$$dz = \frac{(y-z).dx + xdy}{b+x}$$

überdas

$$dz = \frac{-xdx}{z}$$

folglich

$$\frac{(y-z).dx + x.dy}{b+x} = \frac{-xdx}{z}$$

daraus wird

$$(y-z).dx + xdy = \frac{(b+x).x.dx}{z}$$

also

$$\left(y - z + \left(\frac{b+x}{z}\right).x\right).dx = -xdy \text{ oder}$$

$$\frac{z - y - \left(\frac{b + x}{z}\right)x}{x} = \frac{dy}{dx}$$

und umgekehrt

$$dx : dy = x : \left(z - y - \frac{bx}{z} - \frac{x^2}{z}\right) \text{ P.)}$$

Nimmt man also die Abscissen auf EF, und will nun Abscissen und Ordinaten wieder mit x, y, bezeichnen, so wird aus dem vorigen x, y; und aus y wird x, und die Gleichung P verwandelt sich in

$$dy : dx = y : z - x - \frac{by}{z} - \frac{y^2}{z}$$

wo also

$$\frac{y \cdot dx}{dy} \text{ oder die Subt.} = z - x - \frac{by}{z} - \frac{y^2}{z'}$$

welches für den obern Theil der Muschellinie in Absicht auf die Abscissen verneinte Subtangenten giebt, so nämlich, daß Subtangente und zugehörige Abscisse auf verschiedenen Seiten der zugehörigen Ordinate liegen, oder daß die Subtangente von dem Anfang der Abscissen abwärts fällt. In wiefern dieses auch von dem untern Theile gelte, wird sich auf folgende Art bestimmen lassen. Ueberhaupt gilt ebendas für den untern, was sich auch von dem obern Theile sagen läßt, nur der Fall, wenn sich in dem untern ein Knoten befindet, hat einiges besondere. In dem Fall ist nämlich die Breite des Knotens (Alg. 483. das. Erl.) =

a—b

$$\frac{a-b}{a+b}\sqrt{(3a^2-b.(2a+b))}$$

also die zu $x = \frac{a-b}{2(a+b)}\sqrt{(3a^2-b.(2a+b))}$ gehörige Ordinate eine Tangente des Knotens etwa an D, und die hierzu gehörige Subtangente = o. Von D an geht die krumme Linie durch C nach A zu, und die zu jedem Punkt derselben gehörige Subtangente liegt mit der ihr zugehörigen Absciſſe auf einer Seite der zugehörigen Ordinate, bis endlich $x = o$ wird; von da an werden die Absciſſen verneint, und weil die Subtangenten ihre vorige Lage behalten, so müſſen von nun an Absciſſen und zugehörige Subtangenten gegen die zugehörige Ordinaten entgegengeſetzte Lagen haben; alſo iſt der vorige Satz von dem obern Theil der Muſchellinie mit der Einſchränkung allgemein wahr, daß für $b < a$ (Afg. §. 482.) die jedem $y > b$ bis auf das zu $x = \frac{a-b}{2(a+b)}.\sqrt{(3a^2-b(2a+b))}$ gehörige y, zugehörige Subtangente und Absciſſe auf einer Seite von y liegen, oder, daß ſich für $b < a$ die Muſchellinie vom Anfang der Absciſſen ſo lange erhebt, bis $x = \frac{a-b}{2(a+b)}.\sqrt{(3a^2-b.(2a+b))}$; für jedes gröſſere y fällt ſie nun wieder abwärts, und dieß gilt ſowohl für bejahte als verneinte Absciſſen.

§. 98.

und es ist $NS = NQ$ 2c. 2c. weil nämlich $GS = GM$, und $FQ = FM$, so ist $MG - GN = GS - GN = NS = FN - FM = FN - FQ = NQ$.

und also hier 2c. 2c. Es ist nämlich $Q = R - \frac{dMFG}{2}$ oder $= R - o = R$, und $S = R - \frac{dMGF}{2} = R - o = R$; also $Q = S$, und dieses ist hier im strengsten Verstande wahr, weil $dMFG$ für sich, so wie $dMGF$ für sich $= o$ ist, weil aber doch MFG auf eine andere in den nächstfolgenden Zustand gerathen muß, als MGF, so folgt hieraus, wie schon aus dem bisherigen bekannt ist, daß doch $\frac{dMFG}{dMGF}$ in $=$ 1 sein muß, und daß also, wo von der Verhältnis der Differentialien die Rede ist, doch nicht schlechtweg $Q = R$, und $S = R$, sondern $Q = R - \frac{1}{2}dMFG$ und $S = R - \frac{1}{2}dMGF$ gesetzt werden müsse, d. h. es müssen in solchem Fall statt der gleichen Grössen Q, S, Werthe gesetzt werden, die zugleich das in sich enthalten, woraus die Verschiedenheit des Uebergangs in ihren nächstfolgenden Zustand erhellet. Dieß erläutert zugleich 96. am Ende.

oder die Linien FM, GM 2c. 2c. S. die Anmerk. über Huben. Hier hat man also zugleich den Beweiß zu Erl. IIte Forts. §.

§. 99.

§. 99.

Nach Alg. 406. ist (Fig. 8.) GM — FM = GN — FN, also GN — GM = FN — FM. Nähert sich nun N dem M unendlich, so erhält man wie im vor. §. die Tangente TV, und die zwei gradlinigte Dreiecke MQN, MSN, wo MQ = MS, Q = S = R, und MN beiden gemein, folglich △MKN = △MSN, und FNM = MNG ist; nun ist allemal NMK = MNG + MGN, und TMF = MFN + MNF, weil sich also dadurch, daß sich N dem M unendlich nähert, auch die Summe MNG + MGN dem Winkel MNG, und die Summe MNF + MFN dem MNF sich unendlich nähert, so wird sich auch NMK dem MNG, und TMF dem MNF unendlich nähern; es sind aber MNG und MNF einander gleich, folglich auch die, welche sich ihnen unendlich nähern, oder VMK = TMF. Da nun MK die verlängerte GM ist, so ist klar, daß ein Strahl, der von dem Brennpunkt F auf irgend einen Punkt der Hyperbel M fällt, bei M dergestalt reflectirt wird, daß der zurückgeworfene Strahl MK in der verlängerten GM liegt, oder daß der zurückgeworfene rückwärts verlängert den andern Brennpunkt G trift. Wäre LMR eine Parabel, so rückte G unendlich weit hinaus nach (Alg. 564. Erl.) d. h. ein Strahl, der aus F auf irgend einen Punkt der Parabel M fällt, wird bey M nach MK so reflectirt, daß er rückwärts verlängert der Axe PD in einem unendlich entfernten Punkt G begegnet, oder daß der reflecirte Strahl der Axe gleichlaufend ist. Strahlen also, die der Axe parallel

lel auf irgend einen Punkt der Parabel fallen, gehen reflectirt alle durch F. S. Erläut. IIte Forts. S. 416.

§. 102.

Es enthält diese Aufgabe wieder eine blose Anwendung von 77. Allgemein ist nämlich eine Subtangente diejenige grade Linie, die von dem Endpunkt einer Abscisse nach derselben Richtung bis an die Tangente gezogen wird. Hier also, wo PL die Ordinate, FL die Abscisse, und ihre Richtung bei L die an diesen Punkt des Kreises gezogene Tangente ist, ist die zum Punkt P gehörige Subtangente der Cycloide ein Stück auf der an den Kreis gezogenen Tangente nämlich LV. Nun ist allgemein

$$\text{Subt} = \frac{y \cdot dx}{dy}$$

weil also nach (Alg. 610.) $x = y$, folglich auch $dx = dy$, so ist hier

$$LV = \frac{y \cdot dy}{dy} = y = LP.$$

Und hieraus giebt sich die Methode, eine Tangente an P zu ziehen, von selbsten; sie ist nämlich die grade Linie durch P und V gezogen. Das im Buche gesagte rechtfertigt zugleich die Allgemeinheit des Satzes $\text{Subt} = \frac{y \cdot dx}{dy}$, die man sich sonsten hier, wo die Abscissenaxe keine grade Linie wie in 77. sondern ein Kreis ist, vielleicht nicht sogleich verstatten mögte.

§. 104.

Die Aufgabe liesse sich auch so vortragen: Es sei (Fig. 9.) AQ der Kreis, LMN die krumme Linie; Mm, Pp Differentialien; MT, PT Tangenten an M und P, und mS ein Bogen vom Halbmesser Cm, so ist

$$mS : MS = PT : MP$$

also

$$PT = \frac{MP \,.\, mS}{MS} \quad (\odot$$

Nun ist aber

$$CP : Pp = Cm : mS,$$

also $$mS = \frac{Cm \,.\, Pp}{CP}$$

folglich, weil $Cm = CM = y$,

$$mS = \frac{y \,.\, dx}{r}$$

und dieß in $\odot$ gesetzt, giebt

$$PT = \frac{MP \,.\, y \,.\, dx}{MS \,.\, r}$$

Weil nun $CS = Cm = CM + dy$, so ist $CS - CM = MS = dy$, also

$$PT = \frac{MP \,.\, y \,.\, dx}{r \,.\, dy}$$

$$= \frac{(r - y) \,.\, y \,.\, dx}{r \,.\, dy}$$

Man

Man erhält nämlich die Gleichung im Buche, nur r — y statt y gesetzt. Ich habe hier nur deßwegen dieses Verfahren beibringen wollen, weil auf solche Art PT die Subtangente abgiebt, so daß hier allemal

$$\text{Subt} = \frac{r - y}{r} \cdot \frac{y \cdot dx}{dy}$$

Eine grade Linie durch T und M gezogen giebt nun die Tangente MT. Zugleich erhellet, daß hier die Tangenten des Kreises und der andern krummen Linie Funktionen von einander sind.

§. 107.

Die hierzu gehörige Figur hat ohngefähr die Gestalt, wie die Fig. 10. beygefügte. Daß sich nämlich die Spirallinie so krümmen muß, daß sie durch C hindurch geht, erhellet daraus, weil alle Ordinaten PM auf dem Kreise senkrecht stehen, folglich verlängert durch den Mittelpunkt C gehen müssen; der Punkt der Spirallinie, der zu $y = r$ gehört, muß also selbst C sein, oder die Spirallinie geht für $y = r$ durch C. Nun kann man ein x nehmen, das $> P$ ist, wie Alg. 510. Man wird also gewiß auf Werthe von x kommen, für die $y > r$ ist, oder da y noch über C hinaus geht. Hat man z. B. für $x = P + AP$, $y = PD$, so ist D gleichfalls ein Punkt der Spirallinie. Dadurch ergiebt sich ihre Gestalt AMNefCeD, und man sieht, wie sie bis ins Unendliche fortgehe, und in unzähligen Punkten von einer graden geschnitten werden könne. Auch geben sich in ihr vielfache Punkte, wie e der ein doppelter ist. TM ist eine Tangente an ihr. (s. Fig. 10.)

§. 112.

S. Erl. I. St. S. 247. §. 7.

§. 113.

Man hat

$$TP : PM = AT : AK$$

also
$$AK = \frac{PM . AT}{TP}$$

$$= \frac{y . AT}{AT + AP}$$

$$= \frac{y . (y dx : dy - x)}{y dx : dy - x + x}$$

$$= \frac{y . dx : dy - x}{dx : dy}$$

$$= \frac{y . dx - x dy}{dx} = y - \frac{x dy}{dx}.$$

und AK ihre Entfernung davon ꝛc. ꝛc. Ist daher auch AK unendlich, so ist es nicht möglich, irgendwo über oder unter der Axe eine Asymptote zu ziehen, oder die krumme Linie hat alsdann keine Asymptote.

§. 114.

Aus 85. ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{b(a + 2x)}$$

also

also $\frac{dy}{dx} = \frac{b.(a+2x)}{2ay}$, und

$$AK = y - \frac{x.dy}{dx} = y - \frac{bx.(a+2x)}{2ay}$$

$$= \frac{2ay^2 - bx(a+2x)}{2ay}$$

nun ist für die Hyperbel

$$y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$$

also des gefundenen Ausdrucks Zähler $= 2abx + 2bx^2 - abx - 2bx^2 = abx$, und daher $AK = \frac{abx}{2ay} = \frac{bx}{2y}$;

§. 115.

Für $AP = x$, $PM = y$ erhält man

$$\frac{ydx}{dy} = \left(\frac{a^3}{x^2} + c\right) . \frac{-x^3}{2a^3}$$

$$= \frac{-a^3x^3}{2a^3x^2} - \frac{cx^3}{2a^3}$$

$$= -\frac{x}{2} - \frac{cx^3}{2a^3}$$

also

$$\frac{ydx}{dy} - x = -\tfrac{3}{2}x - \frac{cx^3}{2a^3}$$

Für AQ = x, QM = y, ist

$$x = a^3 : y^2 + c$$

also

$$dx = -2a^3 y^{-3} dy$$

und

$$\frac{dx}{dy} = -2a^3 y^{-3} = \frac{-2a^3}{y^3};$$

$$\frac{y \cdot dx}{dy} = -\frac{2a^3}{y^2}$$

und

$$\frac{y \cdot dx}{dy} - x = -2\frac{a^3}{y^2} - x = -2(x-c) - x$$
$$= 2c - 3x$$

daß also At = 2c − 3x; eben so ergiebt sich die AK (Fig. 1.) hier $= y - \frac{xdy}{dx}$; aber $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^3}{2a^3}$, also AK $= y + \frac{xy^3}{2a^3}$; nun ist $x = \frac{a^3}{y^2} + c$, also muß für $x = \infty$ auch $\frac{a^3}{y} = \infty$ werden, mithin y verschwinden. Es verschwindet demnach auch AK für $x = \infty$. Zieht man also PM der AS unter der Entfernung AP, die unendlich klein sein muß, gleichlaufend, so wird PM eine Asymptote vom Schenkel MF; aber für ein unendlich kleines AP fällt MP in AS, folglich ist AS selbst eine Asymptote.

In

In der Lehre von den Kegelschnitten Anal. endl. Gr. wird erinnert, daß die Hyperbel daher entstanden ist, weil in ihr das Quadrat der Ordinate allemal um ein gewisses grösser ist, als das Rectangel aus dem Parameter in die Abscisse. Nachher hat man diesen Namen, ohne auf seinen Ursprung mehr zu sehen, einer ganzen Art von Linien, die mit der Apollonischen Hyperbel nur eine Aehnlichkeit haben, beigelegt, und versteht so unter dem allgemeinen Namen hyperbolischer Linien, alle diejenigen, aus deren Gleichung erhellet, daß sie zwo verschiedene Asymptoten haben, deren jede an zween Schenkeln hinzieht. In dieser Bedeutung ist nun auch die gegenwärtige krumme Linie eine hyberbolische, und vermöge ihrer Gleichung eine vom dritten Grad. (s. unten 211.) Aus gleichem Grund begreift man unter dem allgemeinen Namen parabolischer Linien alle diejenigen, die sich mit ihren Schenkeln unendlich weit hinausziehen, so daß sie sich ohne Aufhören von der Axe entfernen, ohne daß ihre Gleichung verstattete, den Schenkeln Asymptoten zu ziehen. Daß die Apollonische Parabel, für die $ax = y^2$ ist, keine Asymptoten hat, erhellet so. Für sie ist $adx = 2ydy$, also $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$, und $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{2y^2}{a} - x, = \frac{2ax}{a} - x = x$; hier nun $x = \infty$ gesetzt, giebt $\frac{y.dx}{dy} - x$ oder $AT = \infty$

 Ferner

Ferner $y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{ax}{2y} = \frac{2y^2 - ax}{2y} =$

$\frac{2ax - ax}{2\sqrt{ax}} = \frac{\sqrt{ax}}{2}$, welches für $x = \infty$, $AK = \infty^{\frac{1}{2}} . \sqrt{\frac{1}{4}a}$, oder

$$AK = \infty$$

giebt. S. die Vorr. im Buche S. 14. Demnach giebt es hier keine Asymptote (Erl. zu §. 113. am Ende.)

§. 116.

Weil nämlich eine Gleichung zwischen Coordinaten einer krummen Linie den Gang der krummen Linie ausdruckt, so wird solche Gleichung am einfachsten werden, wenn die Coordinaten auf derjenigen graden Linie genommen werden, die ihrer Lage nach unter allen möglichen dem Gang der krummen Linie selbst am nächsten kommt. Und dieses mag der Grund sein, warum die Gleichungen für krumme Linien am einfachsten werden, wenn man die Coordinaten auf den Asymptoten nimmt.

§. 119.

Man kann die für eine krumme Linie gegebene Gleichung im Newtonischen Parallelogramm nach Alg. 687. ordnen, und dann aus jeden zwei äussersten Gliedern Gleichungen zwischen x und y machen. Um dann zu finden, welche dem $x = \infty$ oder $y = \infty$ zugehöre, kürze man die vorgegebene allgemeine Gleichung für die krumme Linie dadurch ab, daß

man

man x oder $y = \infty$ setzt; man wird dadurch Gleichungen erhalten, die mit den vorigen aus dem Newtonischen Parallelogramm einerlei sind, und die also zeigen, ob bei den vorigen $x = \infty$, oder $y = \infty$ zum Grunde liege.

Ex. Für die Muschellinie (Alg. 479.) ist
$x^4 + y^2x^2 + 2bx^3 + (b^2 - a^2)x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0$ ☿)

Dieses sieht nach Alg. 687. geordnet so aus:

$$\begin{array}{rcc} x^4 & * & * \\ 2bx^3 & * & * \\ (b^2 - a^2)x^2 & * & y^2x^2 \\ -2a^2bx & * & * \\ -a^2b^2 & * & * \end{array}$$

Nun setze man I.) $x = \infty$, so wird aus (☿) diese $x^4 - y^2x^2 = 0$, und $x^4 = -y^2x^2$, folglich

$$x^2 = yx\sqrt{-1}$$
und $$x = y\sqrt{-1}$$

oder unmöglich (Alg. 258.) d. h. es giebt für den Fall kein Paar zusammengehörige Coordinaten.

II.) Für $y = \infty$ erhält man $x^4 + y^2x^2 - a^2b^2 = 0$, worin diese beide einfache Gleichungen enthalten sind

1) $x^4 + y^2x^2 = 0$

die wieder wie vorhin was unmögliches giebt

2) $y^2x^2 - a^2b^2 = 0$

woraus sich

$$x = \pm \frac{ab}{y}$$

ergiebt. Demnach hat die Conchoide zwo Schenkel, die sich an den beiden Seiten einer graden Linie als ihrer gemeinschaftlichen Asymptote herziehen, und sich ihr ohne Aufhören nähern, wie Alg. 478. Hieraus läßt sich einigermassen ersehen, wie sich das Parallelogramm bei Erfindung der Asymptoten gebrauchen läßt. Ausser der im Buche erwähnten Analyse des lignes courbes kann man des Hrn. Prof. Kies seine Abhandlung de curuarum algebraicarum asymptotis tam rectilineis quam curuilineis earumque inuestigatione nachlesen.

§. 124.

Es sei

$$\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2e}{a-x} + \frac{e^2}{(a-x)^2}\right)} = 1 + Ae + Be^2 \text{ - - -}$$

so substituire man in 56. V. wo $A = m\alpha$, und $B = \frac{(m-1).A\alpha + 2m\beta}{2}$, den Werth von $m = \frac{1}{3}$, $\alpha = -\frac{2}{a-x}$; dieß giebt

$$\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2e}{a-x}\right)} = 1 - \frac{2}{3(a-x)}e -$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3 \cdot (a-x)^2} - \frac{1}{3 \cdot (a-x)^2}\right)e^2 =$$

1 —

$$1 - \frac{2}{3(a-x)} \cdot e - \frac{1}{9(a-x)^2} \cdot e^2 \text{-----}$$ wo

aber der Coëfficient von e^2 nicht einmal, wie auch im Buche erinnert wird, zu berechnen nöthig ist. Das erste Glied dieser Reihe mit $\sqrt[3]{a(a-x)^2}$ multiplicirt, giebt $\sqrt[3]{a.(a-x)^2}$, das zweite giebt

$$\frac{2e}{3(a-x)} \cdot \sqrt[3]{a.(a-x)^2} = \frac{2e\sqrt[3]{a.(a-x)^2}}{3.\sqrt[3]{(a-x)^3}}$$

oder $= \frac{2e}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{a.(a-x)^2}{(a-x)^3}\right)} = \frac{2}{3}e.\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}$,

und so giebt sich die Reihe im Buche. Nun ist

$Lk = (a + \sqrt[3]{a.(a-x-e)^2}) - (a + \sqrt[3]{a.(a-x)^2})$

oder $= \sqrt[3]{a.(a-x-e)^2} - \sqrt[3]{a.(a-x)^2}$,

also ziehe man $\sqrt[3]{a.(a-x)^2}$ von der eben genannten Reihe ab, oder, welches eben das ist, man lasse aus ihr nur das erste Glied weg, so giebt sich der im Buche genannte Werth für Lk, und folglich weil $Lk = e.P$ ist, auch der Werth für P.

wenn man nun hier 2c. 2c. $\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}$ ist

für $a = x$ ein unendlich Grosses der Ordnung $\frac{1}{3}$, nun ist dx ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, oder ein unendlich Grosses der Ordnung -1.(12.), also jenes mit diesem multiplicirt, giebt $dx\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}$ ein unendlich Grosses der Ordnung $(\frac{1}{3}-1)$ oder der Ord-

Ordnung $-\frac{2}{3}$, also ein unendlich Kleines der Ordnung $\frac{2}{3}$, daß also dy ein unendlich Kleines der Ordnung $\frac{2}{3}$ ist; da nun dx ein solches von der ersten Ordnung ist, so hat man $\frac{dy}{dx} = \frac{(1:\infty)^{\frac{2}{3}}}{(1:\infty)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1}{\infty}\right)^{-\frac{1}{3}}$ $= \infty^{\frac{1}{3}}$, oder der Quotient $\frac{dy}{dx}$ ist ein unendlich Grosses der Ordnung $\frac{1}{3}$, folglich dx in dy unendlich vielmal enthalten. Es ist demnach $\frac{dx}{dy} = 0$, und daher für $x = a$, die Subtangente $\frac{y.dx}{dy} = 0$, folglich die Tangente auf der Axe senkrecht, und wenn die Abscisse an diesem Berührungspunkt um ein unendlich Kleines (dx) wächst, so wächst die zugehörige Ordinate um ein unendlich vielmal grösseres Theilgen (dy), daß also um diesen Berührungspunkt herum die Ordinaten viel schneller wachsen, als die Abscissen abnehmen.

§. 125.

nicht allemal ꝛc. ꝛc. d. h. es kann besondere Fälle geben, wo Li : OH = Lk : e (ϐ) Es sei nämlich e = NO, so verwandelt sich der genannte Ausdruck in diesen Li : OH = LK : NO, oder Li : Ii = Lk : Kk; dieß setzt nun voraus, daß K, I, L, in einer graden Linie liegen müssen, oder daß die krumme Linie KM sich von einer graden in drei Punkten schneiden lassen, also wenigstens eine krumme

krumme Linie der dritten Ordnung sein müsse (Alg. 492.), folglich findet die Gleichung ☿ für Linien der zwoten Ordnung niemals statt; für Linien der höhern Ordnung aber kann sie für gewisse Stellen der krummen Linie zutreffen, wo nämlich solche in mehr als zweenen Punkten von einer graden Linie geschnitten wird.

§. 126.

Man hat nämlich, wenn man a als bekannt annimmt

1) $z = ap$

2) $\frac{dy}{dx} = p$ (125; 123;)

3) Die Gleichung für die Hauptlinie,

Man kann aber aus 1. und 2. sogleich p wegschaffen, so erhält man aus den drei Gleichungen diese zwo

1) $z = \frac{a \cdot dy}{dx}$,

2) die Gl. für die Hauptlinie,

die letztere differentiirt, giebt eine Gleichung zwischen x, y, und dx, dy, so daß sich daraus der Quotient $\frac{dy}{dx}$ durch x und y bestimmen läßt; in dieser so gefundenen Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ substituire man den Werth von y, der sich aus der Gleichung für die Hauptlinie ergiebt, so findet man eine Glei-

chung

chung blos zwischen x und $\frac{dy}{dx}$, und wenn man nun diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in der Gleichung für z an die Stelle von $\frac{dy}{dx}$ setzt, so hat man eine Gleichung zwischen z und x oder für Coordinaten der Differentiallinie $\varkappa\lambda\mu$ (127.)

Ex. Wenn der Parameter b heißt, so ist für die Parabel $bx = y^2$ die Gleichung für die Hauptlinie. Sie differentiirt giebt

$$b\,dx = 2y\,dy \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y}$$

Den Werth von $y = \sqrt{bx}$ substituirt, giebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{bx}}$$

Dieser Werth statt $\frac{dy}{dx}$ in die obige Gleichung für z gesetzt, giebt

$$z = \frac{ab}{2\sqrt{bx}}$$

wo a eine willkührliche Länge ist. Nimmt man also $a = 1$, so hat man

$$z = \frac{b}{2\sqrt{bx}}$$

wo

wo z für jedes bejahte x zweene entgegengesetzte Werthe erhält, für ein verneintes x aber unmöglich wird. Daraus wird sich also die erste Differentiallinie (127.) für die Parabel leicht verzeichnen lassen.

§. 129.

und es ist für rc. rc. Es wird nämlich aus

$$z = \frac{x}{\pm\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= \frac{\mp x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

1) für $x = 0$,

$$z = \frac{\mp 0}{\sqrt{(1-0)}} = \mp 0$$

2) für $x = \frac{1}{2}$

$$z = \frac{\mp \frac{1}{2}}{\sqrt{(1-\frac{1}{4})}} = \mp\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right)}$$

$$= \mp\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \mp 1 : \sqrt{3}$$

3) für $x = 1$

$$z = \frac{\mp 1}{\sqrt{(1-1)}} = \frac{\mp 1}{0}$$

$$= \mp \infty$$

und

und für $x = -1$, $z = \overline{+}\,\infty$, woraus zugleich erhellet, daß die Tangenten an A und B, EF und ef Asymptoten von des Kreises Differentiallinie sind.

und $\frac{-Ct}{tn}$ verneint ꝛc. ꝛc. Weil nämlich Ct verneint ist, so ist $-Ct$ bejaht, und folglich, da tn eine verneinte Ordinate ist, der Quotient $-\frac{Ct}{tn}$ aus einer bejahten Grösse, und einem verneinten Divisor verneint.

Folglich gehören ꝛc. ꝛc. oder vielmehr, weil das zu den Coordinaten CT, TM, gehörige $z = -\frac{CT}{TM} = TR$, das zu den Coordinaten CT, Tm gehörige $z = -\frac{CT}{Tm} = Tr$, das zu den Coordinaten Ct, tN, gehörige $z = \frac{-Ct}{tn} = tq$, und das zu den Coordinaten Ct, tn gehörige $z = -\frac{Ct}{tn} = tQ$ ist, so ist klar, daß die Quadranten des Kreises und die Schenkel der Differentiallinie so zusammen gehören:

I. Der

I.	II.
Der Quadrant KMA, dessen Coord. CT, TM, sind.	Der Quadrant AmL, dessen Coord. CT, Tm sind.
Der Schenkel RC, dessen Coord. CT, TR sind.	Der Schenkel rC, dessen Coord. CT, Tr sind.
III.	**IV.**
Der Quadrant BNK, dessen Coord. Ct, tN sind.	Der Quadrant LNB, dessen Coord. Ct, tn sind.
Der Schenkel Cq, dessen Coord. Ct, tq sind.	Der Schenkel CQ, dessen Coord. Ct, tQ sind.

oder

zu dem obersten Halbkreis AMNB gehört die Differentiallinie RCQ, zu dem untersten die rCQ.

§. 130.

Man kann nämlich (Fig. 10.) $\varkappa\lambda\mu$ wieder als eine Hauptlinie betrachten, und so gilt von ihr wieder eben das, was 122. von der Hauptlinie KLM ist gesagt worden.

§. 131.

wenn e unendlich ꝛc. ꝛc. wenn nämlich e unendlich klein wird, so wird auch $\mu\varrho$ unendlich klein; nun ist

$$\mu\varrho = P\mu - O\lambda = \frac{a}{e}.Ml - \frac{a}{e}Lk,$$

folglich muß für ein unendlich kleines e, $a.\frac{Ml - Lk}{e}$

auch

auch verschwinden, oder es muß sich Ml — Lk zu e verhalten wie eine endliche zu einer unendlich grossen Grösse, welches den im Buche genannten Satz giebt.

§. 132.

Heissen die zu x, X, gehörige Ordinaten in der Hauptlinie y, Y, in der Differentiallinie z, Z, so ist

$$z : Z = a \frac{dy}{dx} : a . \frac{dY}{dX}$$

$$= dy : dY$$

für $dx = dX$ (s. Erl. zu 134.); also verhalten sich in der Differentiallinie die Ordinaten, wie die Differentialien der Ordinaten in der Hauptlinie wenn x unveränderlich angenommen wird. Sucht man nun die Verhältnis der Differentialien für die Ordinaten dieser Linie $\kappa\lambda\mu$, so erhält man die Verhältnis der Differentialien von Grössen, die sich selbst wie Differentialien, nämlich wie die Differentialien der Ordinaten von der Linie KLM, verhalten d. i. die Verhältnis der **zwoten** Differentialien oder der **Differentiodifferentialien** bessere Begriffe erlangen, als aus Wolfs Anleitung a. a. O. §. 183. u. f.

§. 133.

so wird für ein verschwindendes rc. rc. Wie man nämlich das Differential einer Grösse als den Unterschied zwischen ihr und ihrem nächstfolgenden Zustand betrachtet; so hat man das Differentiodifferential einer Grösse als den Unterschied zwischen

schen ihrem Differential und dieses Differentials nächstfolgendem Zustande anzusehen.

§. 134.

Wir haben überhaupt von den nächstfolgenden Zuständen einer Grösse keine deutliche Begriffe (s. Kästn. höhere Mech. S. 356. u. folgg.) Nur so viel wissen wir, daß der Unterschied eines jeden Zustandes von dem nächstfolgenden = 0 ist, und daß dieß auf mehr als eine Art geschehen kann, oder daß sich jede Grösse auf verschiedenerlei Art in ihrem nächstfolgenden Zustand gedenken läßt. So kann man sich für jede krumme Linie die Ordinaten als Glieder einer arithmetischen Reihe gedenken, da jedes vom nächstfolgenden unendlich wenig verschieden wäre, und jedes folgende Glied wäre also der nächstfolgende Zustand der Ordinate; nähme man aber diese Voraussetzung an, so wäre klar, daß die zu dieser Reihe Ordinaten gehörige Reihe Abscissen nicht auch eine arithmetische, sondern irgend eine andere sein wird, in der die Glieder nicht alle um einerlei von einander verschieden sind, obgleich jedes folgende Glied auch der nächstfolgende Zustand einer Abscisse ist. Eben so könnte man sich alle nächstfolgende Zustände einer Abscisse als eine arithmetische Reihe gedenken, aber die dazu gehörige Reihe der nächstfolgenden Zustände der Ordinaten könnte dann keine solche Reihe ausmachen, sondern die Differenz ihrer Glieder müßte gehörig darnach bestimmt werden. Das alles, heißt kürzer so viel: In einer Gleichung zwischen dx und dy läßt sich allemal eine dieser beiden

Differentialien als **unveränderlich** ansehen, die andere aber bleibt **veränderlich** und muß dann durch jene bestimmt werden. Man muß dieses in Absicht der höhern Differentialien bemerken. s. 143.

§. 135.

Verfahren rc. rc. Nur mit der Bemerkung des vor. §. daß nicht jeder veränderlichen Grösse Differential auch veränderlich ist.

§. 142.

s. die Erläuter. zu 134.

§. 143.

Daß höhere Differentialien ordentlich keine bestimmte Werthe haben, sondern erst dadurch bestimmt werden, daß man eine Grösse, die durch erste Differentialien gegeben ist, oder ein erstes Differential selbst unveränderlich setzt, erhellet aus dem hier angeführten Beispiel. Man setze nämlich nach 142. $\frac{dy}{dx} = p$, und suche dadurch, daß man verschiedene Grössen unveränderlich setzt, für ein höheres Differential z. B. für ddy mehrere Gleichungen, so wird man Werthe von ddy erhalten, deren Verschiedenheit sogleich in die Augen fällt. Aus $\frac{dy}{dx} = p$ folgt nämlich $p\,dx = dy$, also von neuem differentiirt, giebt

$$ddy = d(p\,dx) = dp \,.\, dx + p \,.\, ddx$$

daß

daß nun hier ddy zweene verschiedene Werthe bekommt, nachdem man eine oder die andere durch erste Differentialien gegebene Grösse als unveränderlich ansieht, erhellet wenn man z. B. die zweene Fälle annimmt, da für den ersten überall zu dy einerlei dx, und für den zweeten überall zu jedem Paar der unendlich kleinen Coordinaten dx, dy gleich grosse Theilchen der krummen Linie gehören sollen.

Für den ersten Fall ist also dx unveränderlich, und daher in der gehörigen Bedeutung $ddx = 0$; die Gleichung $ddy = dp \cdot dx + p \cdot ddx$ verwandelt sich demnach in folgende

1) $ddy = dp \cdot dx$

Im leztern Fall aber ist der zu dx, dy, gehörige unendlich kleine Bogen unveränderlich. Nun ist das Differential eines Bogens $= \surd (dx^2 + dy^2)$ (266;) also muß für diesen Fall $\surd (dx^2 + dy^2)$ und daher $dx^2 + dy^2$ unveränderlich, folglich das Differential davon oder $d(dx^2 + dy^2) = 0$ sein (wie 23. Erl. no. 3.), man hat daher, wenn man in der That differentiirt

$$2dx \cdot ddx + 2dy \cdot ddy = 0$$

also

$$dx \cdot ddx = - dy \cdot ddy$$

und

$$ddx = - \frac{dy \cdot ddy}{dx}$$

folglich

$$p \cdot ddx = - \frac{p \cdot dy \cdot ddy}{dx};$$

F 2 die

die Gleichung $ddy = dp \cdot dx + p \cdot ddx$ verwandelt sich daher für diesen Fall in folgende

$$ddy = dp \cdot dx - \frac{p \cdot dy \cdot ddy}{dx} \text{ oder}$$

$$dx \cdot ddy = dp \cdot dx^2 - pdy \cdot ddy \text{ oder}$$

$$(dx + p \cdot dy) \cdot ddy = dp \cdot dx^2, \text{ also}$$

$$2)\ ddy = dp \cdot dx \cdot \frac{dx}{dx + p \cdot dy}$$

Weil nun $dx + pdx$ in $= dx$, so ist offenbar

$$\frac{dx}{dx + pdy} \text{ in } = 1, \text{ also}$$

$$dp \cdot dx \cdot \frac{dx}{dx + pdy} \text{ in } = dp \cdot dx$$

oder die beiden Werthe von ddy in 1. u. 2. sind offenbar von einander verschieden.

§. 148.

Also $\omega + e = \omega + \text{-----}$ 2c. 2c. oder vielmehr $\omega + e = x^4 + \text{-----}$ weil $x^m = \omega$, und hier $m = 4$ ist.

§. 152.

Es ist diese Lehre überaus wichtig, und ich habe ihrer deßwegen um derentwillen, die sich mit der Anal. des Unendl. nicht beschäftigen können, schon in den Erl. der Alg. S. 235. u. folgg. erwähnt. Eine kleine Ueberlegung wird auch Anfänger überzeugen, daß ihre Anwendung weit allgemeiner, als blos

auf

auf die Erfindung größter und kleinster Ordinaten oder überhaupt solcher größten und kleinsten, die bei krummen Linien vorkommen, sein müsse. Es ist nämlich überall durch alle Theile der Mathematik hindurch blos von Verhältnissen die Rede, und da sich allemal die Verhältnis verschiedener Grössen, von welcher Art sie auch sein mögen, durch Linien ausdrucken läßt, so erhellet, daß sich überhaupt jede Gleichung zwischen Grössen, die Funktionen von einander sind, als eine Gleichung für eine krumme Linie, und die veränderlichen Grössen in ihr als Coordinaten ansehen lassen. Daraus wird begreiflich, wie sich die Lehre von Erfindung der Größten und Kleinsten überhaupt auf alle Theile der Mathematik anwenden lasse, so daß sie z. B. in der Mechanik, wo von der Einrichtung der Kräfte für die größte Wirkung die Rede ist, völlig unentbehrlich ist. Ein Beyspiel von der Anwendung dieser Lehre in der gemeinen Geometrie habe ich schon in der Erl. der Alg. S. 297. f. beigebracht. Auch giebt uns die gehörige Anwendung dieser Sätze selbst deutlichere Begriffe von der Natur der krummen Linien und ihrer Krümmung. So darf man z. B. nur in einer Gleichung zwischen den Coordinaten einer Linie und dem Halbmesser der Krümmung, worüber die Untersuchung weiter unten vorkommen wird, den Werth von x suchen, für den der Halbmesser der Krümmung am kleinsten wird, so weiß man den Punkt, wo die krumme Linie am stärksten gekrümmt ist, wie leicht einzusehen ist.

So wird der Ellipse 2c. 2c. s. Erl. der Alg. S. 237.

§. 153.

Man vergleiche hiermit Alg. 274. u. 275.

§. 154.

Cd **ein kleinstes** 2c. 2c. Nämlich ein größtes Verneintes, oder Cd ist diejenige, welche unter allen Ordinaten mit ihrem Endpunkt d sich am wenigsten, und CD diejenige, welche sich am meisten über die Axe AB erhebt; nun ist man gewohnt die Grösse der Ordinaten darnach abzumessen, wie sie sich über die Axe erheben; also ist in der That in eben dem Verstand Cd die kleinste Ordinate, in welchem CD die größte ist.

§. 155.

Die Auflösung in I. ergiebt sich aus 146. wenn man daselbst $m = 1$, $c = \pm \alpha$ und $\omega = y$ setzt.

Zu II.

so kann man allemal 2c. 2c. Es läßt sich nämlich allemal ein Werth von α angeben, der $\alpha^2 + \alpha^3$ ------ in infinit. um eine gegebene Grösse kleiner giebt, als α; s. Alg. 109. Dieser Umstand wird hier deßwegen erwähnt, weil daraus erhellet, daß es allemal blos auf das zweite Glied ankommt, zu beurtheilen, ob in Δ von y was abgezogen oder was dazu addirt, wäre nämlich $\frac{\alpha . dy}{dx}$ bejaht oder

verneint,

verneint, so mag die Summe aller folgenden Glieder verneint oder bejaht sein, sie werden doch, weil sie zusammen weniger, als $\frac{\alpha \,.\, dy}{dx}$ betragen, dem Glied $\frac{\alpha dy}{dx}$ die Eigenschaft des Bejahten oder Verneinten nicht benehmen können. Eben aus diesem Grund wird dieser Umstand, daß man α so klein nehmen könne, noch einmal in IX. erwähnt. Daß es nun aber auch an sich verstattet ist, α so klein man will zu nehmen, erhellet daraus, weil, wenn zu einem gewissen Werth von x ein größtes oder kleinstes y gehört, alsdann sogleich bei der allergeringsten Veränderung von x oder bei dem allerkleinsten Werthe von α, x schon einen Werth von y geben müsse, der nicht mehr der größte oder nicht mehr der kleinste ist, den y haben kann, und ein solcher Werth von α ist hier schon hinreichend.

Zu VIII.

Ist aber auch ꝛc. ꝛc. d. h. wenn in Γ, Δ, ein solches Glied den ersten endlichen Quotienten giebt, welches ein höheres Differential von einer ungraden Ordnung enthält, so hat man kein x, dem ein größtes oder kleinstes y zugehörte. Enthält aber das Glied in Γ, Δ, welches den ersten endlichen Quotienten giebt, ein Differential von y von einer graden Ordnung, so gehört dem Werth von x ein größtes oder kleinstes y zu.

Zu VIIII.

Und so erhellet rc. rc. Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = (x - f)^m \cdot p$ entsteht nämlich aus der Integralgleichung $y = (x - f)^{m+1} \cdot \frac{p}{m+1}$ oder

$$\left(\frac{m+1}{p}\right) \cdot y = (x - f)^{m+1}$$

wie eine kleine Ueberlegung zeigt, man setze also in 144. $\frac{m+1}{p} \cdot y$, $x - f$, $m + 1$, statt ω, x und m, so verwandelt sich der dortige allgemeine Ausdruck für $\frac{d^n \omega}{dx^n}$ in folgenden:

$$(m+1) \cdot m \cdot (m-1) \cdots (m-n+2) \cdot (x-f)^{m+1-n}$$

$$= \frac{d^n \cdot \left(\frac{m+1}{p}\right) \cdot y}{dx^n}$$

$$= \frac{(m+1) \cdot d^n \frac{y}{p}}{dx^n}$$

oder

$$m \cdot (m-1) \cdots (m-n+2) \cdot (x-f)^{m+1-n}$$

$$= \frac{d^n \frac{y}{p}}{dx^n}$$

 So

So lange nun hier $n < m + 1$, ist $(x - f)^{m+1-n}$ für $x = f$, $= 0$, oder wenn man in I. Γ und Δ, $\frac{y}{p}$ statt y setzt, so verschwinden da alle Glieder, welche $\frac{d^n y}{dx^n}$ enthalten, weil $\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+2).(x-f)^{m+1-n}$ allemal den Factor $(x-f)^{m+1-n} = 0$ enthält. Sobald aber $n = m + 1$, also $m + 1 - n = 0$ wird, ist der Factor $(x-f)^{m+1-n} = (x-f)^0 = 1$, und der Werth von $\frac{d^n y}{dx^n}$ verschwindet da nicht mehr; das erste endliche Glied also in Γ, Δ, ist das, worin $\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}$ vorkommt. Ein größtes oder kleinstes y dem Werthe $x = f$ zu, oder nicht zu, nachdem $m + 1$ gerade oder ungerade, d. i. nachdem m ungerade oder gerade ist. (Erl. zu VIII.)

Man begnügt sich gewöhnlich mit der Regel (IIII.) die auch oft schon hinreichend ist; allein daß man sich mit ihr nicht allemal begnügen kann, zeigen hier der V. u. fgg. Absätze. Blos zu dieser hätte man auch nicht einmal die Betrachtung der höhern Differentialien nöthig, sondern kann sie auf eine leichtere Art rechtfertigen, wie man beim Wolf a. a. O. §. 64. findet. s. hier §. 161. Die Betrachtung der höhern Differentialien unterrichtet uns aber auch zugleich, ob y insbesondere ein Größtes oder ob es

ein Kleinstes sei, welches die nur genannte Regel unentschieden läßt.

§. 156.

Man setze $(x - a)^m = y$, so hat man

$$dy = m(x - a)^{m-1} dx$$

also $$\frac{dy}{dx} = m \cdot (x - a)^{m-1}$$

die mit der Gleichung in (VIIII. 155. am E.) einerlei ist, wenn man daselbst $f = a$, $m = m - 1$, und $P = m$ setzt, folglich giebt es hier u. s. w. wie im Buche. Man untersuche daher, ob man für ein grades m in der That ein Größtes oder Kleinstes erhalte, so giebt eben die Rechnung (155. VIIII.) für y in der That ein Größtes oder Kleinstes. Da ferner das Produkt $m \cdot (m - 1) \cdots 1$ folglich auch $\frac{d^m y}{dx^m}$ bejahr sein muß, so folgt aus (155. VIII.) daß das zu $x = a$ gehörige y ein Kleinstes ist; es ist nämlich für diesen Werth von x, $y = 0$, nämlich $= (x - a)^m$, aber $x - a = 0$.

§. 157.

Man setze $x \cdot (a - x) = y$, also $y = ax - x^2$, so erhält man die Differentialgleichung $dy = adx - 2xdx = (a - 2x) \cdot dx$, also $\frac{dy}{dx} = a - 2x$, und diese wieder differentiirt giebt das zweite Differential $\frac{dx \cdot ddy}{dx^2} = -2dx$ oder $\frac{ddy}{dx^2} = -2$

$= P$

$= p$ (155. V.), daß also hier p endlich ist. Erhält man daher dadurch, daß man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt, einen bestimmten Werth für x, so hat man das x, dessen zugehöriges y ein Größtes oder ein Kleinstes ist (IIII. V. VIII. 155.), welches von beiden es sei, muß man aus (155. III. oder VIII.) beurtheilen, da nämlich hier $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$, also d^2y offenbar verneint ist, so ist nach III. y ein Größtes. Man erhält aber, wenn man in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = a - 2x$, $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt, $a - 2x = 0$, oder $a = 2x$, also $x = \frac{1}{2}a$, für diesen Werth von x wird also y oder $a.(a - x)$ ein Größtes.

§. 160. *

Es wird mir verstattet sein, aus der oben angeführten Schrift von Hrn. Kies einige Anwendungen der Lehre von Erfindung des Größten und Kleinsten herzusetzen, und besonders auch den Gebrauch obiger Formeln §. 30. dadurch zu erläutern.

Bei der Theorie der Centralkräfte wird da, wo von der Natur der Bahn geworfener Körper die Rede ist, zugleich gelehrt, daß solche desto krümmer werde, je mehr sich der Winkel, den die Richtungen des Körpers und der Centralkraft mit einander machen, einem rechten nähert. s. Hrn. v. Segn.

Phys.

Phys. §. 585. Cmd (Fig. 11.) sei der genannte Winkel, so wird die gedachte Linie am stärksten gekrümmt sein, wenn er ein rechter ist. Wenn ne der mC gleichlaufend ist, so sei nmC kein rechter Winkel; nun lasse man aus e auf mn eine Linie ef senkrecht, so wird $fe = ne . \sin n$; $nf = ne . \mathrm{Cos}\, n$; $mf = mn - ne . \mathrm{Cos}\, n$, und $\mathrm{tang}\, m = \frac{ne . \sin n}{mn - ne . \mathrm{Cos}\, n}$, $\frac{dm}{(\mathrm{Cos}\, m)^2} = (mn - ne . \mathrm{Cos}\, n)$ $: (ne . \mathrm{Cos}\, n . dn) - (ne . \sin n)^2 dn = 0$, und daher $\mathrm{Cos}\, n = \frac{ne}{mn} = \mathrm{Cos}\, m$. Um nun zu ersehen, ob sich dieser Werth $\mathrm{Cos}\, m = \frac{ne}{mn}$ sich auf ein Größtes oder auf ein Kleinstes beziehe, wollen wir die höhere Differentialien betrachten.

$$\frac{dm}{(\mathrm{Cos}\, m)^2} = \frac{(mn - ne . \mathrm{Cos}\, n) . (ne . \mathrm{Cos}\, n\, dn) - (ne . \sin n)^2 dn}{(mn - ne . \mathrm{Cos}\, n)^2}$$

Weil $\mathrm{tang}\, m = \frac{ne . \sin n}{mn - ne . \mathrm{Cos}\, n}$, so wird

$$1 + \mathrm{tang}\, m . \mathrm{tang}\, m = \frac{1}{(\mathrm{Cos}\, m)^2} =$$

$mn^2 - 2 mn . ne . \mathrm{Cos}\, n + ne^2 . \mathrm{Cos}\, n . \mathrm{Cos}\, n + ne^2 \sin n . \sin n : (mn - ne . \mathrm{Cos}\, n)^2$

oder

oder

$$\frac{1}{(\mathrm{Cos}\,m)^2} = \frac{mn^2 - 2mn.ne.\mathrm{Cos}\,n + ne^2}{(mn - ne.\mathrm{Cos}\,n)^2}$$

$$\frac{dm}{(\mathrm{Cos}\,m)^2} = mn.ne.\mathrm{Cos}\,n.dn - ne^2.(\mathrm{Cos}\,n)^2 dn - ne^2(\sin n)^2 dn : (mn - ne.\mathrm{Cos}\,n)^2$$

$$= \frac{mn.ne.\mathrm{Cos}\,n.dn - ne^2.dn}{(mn - ne.\mathrm{Cos}\,n)^2}$$

und den gefundenen Werth von $\frac{1}{\mathrm{Cos}\,m^2}$ substituirt, giebt

$$\frac{dm}{dn} = \frac{mn.ne.\mathrm{Cos}\,n - ne^2}{mn^2 - 2mn.ne.\mathrm{Cos}\,n + ne^2}$$

$$\frac{ddm}{dn^2} = \frac{(ne^2 - mn^2).ne\sqrt{(mn^2 - ne^2)}}{mn^2 - ne^2}$$

Da nun $\sqrt{(mn^2 - ne^2)}$ keine unmögliche Grösse ist, so muß $\frac{ddm}{dn^2}$ verneint sein, und es ist also m ein Größtes, und damit es ein solches werde, so muß $\mathrm{Cos}\,m = \frac{ne}{mn}$ sein; nun ist aber mn eine endliche Geschwindlichkeit und ne eine unendlich kleine, also $\mathrm{Cos}\,m = \frac{0}{1}$, und $\mathrm{Cos}\,90° = 0$, demnach $m = 90°$.

II.

II.

AF (Fig. 12.) sei ein Thurn, von dem in einer gewissen Entfernung ein Garten, dessen Breite CD ist, liegt, man sucht die Stelle des Thurns, woraus man den Garten betrachten muß, wenn er am breitesten scheinen soll.

Aufl. Es sei $CD = a$, $AC = b$, $AG = x$, so wird $GC = \sqrt{(b^2 + x^2)}$; $GD = \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2 + x^2)}$ und

$$\text{Cos}\, CGD = \frac{b^2 + x^2 + ab}{\sqrt{(b^2 + x^2).(a^2 + 2ab + b^2 + x^2)}}$$

s. Trig. 20. S. Nun setze man das Differential des $\text{Cos}\, CGD = 0$; man nehme also

$$\sqrt{(b^2 + x^2).(a^2 + 2ab + b^2 + x^2)} = z,$$

oder

$$(b^2 + x^2).(a^2 + 2ab + b^2 + x^2) = z^2,$$

so wird

$$(b^2 + x^2).2xdx + (a^2 + 2ab + b^2 + x^2).2xdx = 2zdz$$

oder

$$(a^2 + 2ab + 2b^2 + 2x^2).xdx = zdz$$

und

$$dz = \frac{a^2 + 2ab + 2b^2 + 2x^2}{\sqrt{(b^2 + x^2).(a^2 + 2ab + b^2 + x^2)}}.xdx$$

folglich das Differential des $\text{Cos}\, CGD = [2xdx \sqrt{(b^2 + x^2).(a^2 + 2ab + b^2 + x^2)} - ((b^2 + x^2 + ab)(a^2 + 2ab + 2b^2 + 2x^2)xdx) : \sqrt{(b^2 + x^2).(a^2 + 2ab + b^2 + x^2)}] : ((b^2 + x^2).(a^2 + 2ab + b^2 + x^2))$

und

und dieß $= 0$ gesetzt, giebt

$$2(b^2+x^2).(a^2+2ab+b^2+x^2)=(a^2+2ab+2b^2+2x^2)(b^2+x^2+ab)$$

also

$$x^2=(a+b).b$$

Man verlängere also DA bis in E, und mache AE $=$AC; dann beschreibe man über dem Durchmesser ED einen Halbkreis; dieser schneidet den Thurn AF in dem gesuchten Punkt B.

III.

Unter allen Cylindern von eben dem Inhalt $=a^3$ demjenigen anzugeben, dessen Oberfläche die kleinste ist. (*)

Aufl. Es sei der Durchmesser der Grundfläche $=v$, so wird $1:\pi=v:\pi v$ dem Umfang der Grundfläche, wenn $1:\pi$ die Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie bedeutet; und die Höhe des Cylinders mit $\frac{1}{4}\pi v^2$ multiplicirt, giebt dessen Inhalt. Nun ist nach der Aufgabe

$$\tfrac{1}{4}\pi v^2 \times \text{Höhe} = a^3$$ und

(*) Es wollte Jemand eine grosse Anzahl blecherner cylindrischer Gefässe, die alle ein gegebenes Maaß halten mußten, verfertigen, und weil er das Gesetz der Sparsamkeit gerne zu beobachten suchte, so bewog ihn dieses, dem Hrn. Hofrath Kästner die Frage vorzulegen, was er diesen cylindrischen Gefässen für eine Gestalt geben müsse, um mit dem wenigsten Bleche auszukommen. Ich führe diesen Umstand hier nur zum Beweiß an, wie nützlich dergleichen Kenntnisse auch oft dem Handwerksmann sein können.

und

$$\frac{4a^3}{\pi v^2} = \text{Höhe des Cylinders}$$

und, wie die Geometrie lehrt,

$$\text{die Oberfläche des Cylinders} = \tfrac{1}{2}\pi v^2 + \frac{4a^3}{v}$$

und da diese die kleinste sein soll, so erhält man durch Differentiirung

$$\pi v\,dv - \frac{4a^3\,dv}{v^2} = 0$$

also $\pi v = \frac{4a^3}{v^2}$, oder $4a^3 = \pi v^3$, und

$$v = a \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Folglich des Cylinders Oberfläche $= \frac{1}{2}\pi v^2 + \frac{4a^3}{v}$

$$= \tfrac{1}{2}\pi a^2 \sqrt[3]{\left(\frac{16}{\pi^2}\right)} + \frac{4a^2}{\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}} = \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt[3]{16\pi} +$$

$$a^2 \sqrt[3]{16\pi} = \tfrac{3}{2} a^2 \sqrt[3]{16\pi} = 3a^2 \sqrt[3]{2\pi};$$

die Höhe dieses Cylinders, dessen Oberfläche die kleinste ist, wird $\frac{4a^3}{\pi v^2} = \frac{4a^3}{\pi a^2 \sqrt[3]{\frac{16}{\pi^2}}} = a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

also

also ist diese Höhe $= v =$ dem Durchmesser der Grundfläche. Ferner verhält sich die Oberfläche des Würfels zur Oberfläche des nur erwähnten Cylinders $= 6 : 3\sqrt[3]{2\pi} = 1 : \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$.

Es sei des Würfels Oberfläche $= 1$, so wird

$$l\pi = 0{,}4971499$$
$$l6 = 0{,}7781513$$

$$l\frac{\pi}{6} = 9{,}7189986 - 10 \text{ oder}$$
$$= 29{,}7189986 - 30$$
$$l\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 9{,}9063329 - 10$$
$$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = \frac{8059960000}{10000000000}$$

$= 0{,}805996 =$ der Oberfläche einer gleichhaltigen Kugel;

$$l\pi = 0{,}4971499$$
$$l4 = 0{,}6020600$$

$$l\frac{\pi}{4} = 9{,}8950899 - 10 \text{ oder}$$
$$= 29{,}8950899 - 30$$
$$l\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} = 9{,}9650299 - 10$$

$\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} = 0{,}922635 =$ der kleinsten cylindrischen Oberfläche. Es ist also

die Oberfläche des Würfels = 1.
" " " Cylinders = 0,922635.
" " der Kugel = 0,805996.

Ob ein gefundenes Größtes oder Kleinstes insbesondere ein Größtes oder ob es ein Kleinstes sei, läßt sich oft aus der Natur der Sache selbst sogleich erkennen, wie in dem zuletzt erwähnten Exempel. Es ist nämlich klar, daß man einem Cylinder von gegebenem Inhalt entweder eine Höhe, oder eine Grundfläche, welche man will und so groß man will, geben kann, wenn man nur nachher das übrige gehörig darnach berechnet; also kann ein Cylinder einen gegebenen Inhalt haben, und seine Oberfläche doch ungeheuer groß genommen werden, und es giebt da gar kein Größtes. Also muß sich schon aus diesem Grund die vorerwähnte Rechnung gewiß auf eine kleinste Oberfläche beziehen. Ausserdem zeigt es aber auch die Vergleichung mit 155. Weil nämlich die kleinste cylindrische Oberfläche $= \frac{1}{2}\pi v^2 + \frac{4a^3}{v} = y$, und $\pi v - \frac{4a^3}{v^2} = \frac{dy}{dv}$ und $\pi + \frac{8a^3}{v^3} = \frac{ddy}{dv^2}$, welches zweite Differential bejaht ist, so ist die Oberfläche ein Kleinstes.

Es würde überflüßig sein, mehrere Exempel, die den Nutzen der Methode des Größten und Kleinsten beweisen, hier beizubringen. Ihr Nutzen zeigt sich im bürgerlichen Leben überall, und selbst der Krieger kann ihrer nicht entbehren, wovon sich jeder über-

zeugen

zeugen kann, der nur, um ein allgemein bewährtes Buch zu nennen, das vortrefliche Magazin für Artilleristen vom Hrn. Bergrath Böhm aufschlägt z.B. im II. B. S. 15. u. fgg. Ein Buch, das keiner missen kann, der Artillerie auch nur als Nebensache treibt, und woraus Anfänger überhaupt auch den Nutzen, den Kenntnisse der höhern Analysis dem Krieger leisten, beurtheilen können.

§. 163.

Diese Ueberschrift wird durch Erl. 115. erläutert.

§. 164.

welches eine grade Linie sein ꝛc. ꝛc. Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1} + (m-1).p x^{m-2} \text{-----} + t$$

erhellet nämlich, daß für die erste Differentiallinie das Glied der Hauptgleichung (163.) welches x^1 enthielte x^0 erhält; eben so zeigt sich, daß $\frac{dy}{dx}$ ferner differentiirt eine Gleichung für $\frac{d^2y}{dx^2}$ giebt, deren letztes Glied s ist, wenn das drittletzte Glied der Hauptgleichung sx^2 wäre; und so ist überhaupt klar, daß sich für $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ eine Gleichung ergiebt, deren letztes Glied derjenige Coefficient ist, der in der Haupt-

gleichung (163.) zu x^{m-1} gehörte, oder daß sich die $m-1$te Differentialgleichung so ergiebt, als wenn sie aus der Hauptgleichung $x^m + p = y$ entstanden wäre. Sucht man also aus der erwähnten Hauptgleichung die Gleichung für die $m-1$te Differentiallinie oder einen Ausdruck für $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, so darf man nur mit der Gleichung $x^m + p = y$ nach (144.) verfahren, dadurch erhält man $m x^{m-1} = \frac{dy}{dx}$ wie a. a. O. also daselbst $m-1$ statt n gesetzt,

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = m\,.\,(m-1) \cdots 2\,.\,1\,.\,x,$$

dieß ist nämlich der Werth von z oder der Ordinate, die in der $m-1$ten Differentiallinie zur Abscisse x gehört. Also ist für die $m-1$te Differentiallinie, wenn $m\,.\,(m-1) \cdots 2\,.\,1\,. = a$ gesetzt wird, $z = ax$, welches eine Gleichung für die grade Linie ist. Weiter als bis auf die $m-1$te Differentiallinie kann man nicht gehen. Wollte man nämlich die Gleichung für die $m$te Differentiallinie haben, so verwandelten sich auch m und p in o, und man müßte also mit $x^o + o = y$, oder $y = 1$ nach 144. verfahren, aber da hätte man keine Gleichung mehr zwischen veränderlichen Grössen x und y, und folglich auch keine Differentialien.

§. 165.

Der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ ꝛc. ꝛc. d. i. der Gleichung

$$mx^{m-1} + (m-1).px^{m-2} \text{----} + t = 0$$

§. 168.

Wenn die Hauptgleichung m ꝛc. ꝛc. d. i. wenn die Hauptgleichung lauter u. s. w.

Denn ihre Zahl 1. ꝛc. ꝛc. Es ist nämlich die ungerade 1. entweder der Unterschied einer ungeraden Zahl n und einer graden 2 k, oder umgekehrt einer graden n und einer ungeraden 2 k + 1; nun ist aber, wie im Buche zuvor erwähnt worden, jeder n — 2kte Durchschnitt, was auf n und k für ganze Zahlen sind, allemal verneint, und jeder n — (2k + 1)te bejaht, also u. s. w.

§. 169.

In der Voraussetzung ꝛc. ꝛc. daß nämlich die Differentialgleichung lauter verschiedene mögliche und darunter n bejahte Wurzeln habe; und weil daraus folgt, daß die Hauptlinie n größte Ordinaten haben müsse (s. den Anf. von 167.), so läßt sich hieraus das übrige im Buche leicht verstehen.

Nicht weniger ꝛc. ꝛc. es können ihrer aber mehrere sein (s. 170. am E.)

§. 170.

und folglich schneidet ꝛc. ꝛc. Es wird nämlich für $x = o$, $y = u$ also die Ordinate im Anfang der Abscissen durch A bejaht, wenn u bejaht ist; weil nun die Ordinate durch G eine größte verneinte ist, so folgt, daß zwischen A und G Punkte der krummen Linie über und Punkte von ihr unter der Axe liegen, folglich die krumme Linie zwischen A und G nothwendig durch die Axe gehen müsse.

solches entweder zweimal ꝛc. ꝛc. damit nämlich die krumme Linie bei G wieder unter die Axe kommen, und GH dadurch verneint werden könnte, wie der Anf. dieses §. erfodert.

gar nicht ꝛc. ꝛc. wie wenn A zwischen C und G läge.

Solchergestalt giebt es ꝛc. ꝛc. Es fallen nämlich zur Rechten der ersten größten Ordinate n verschiedene Durchschnitte (169.); ist nun u bejaht, so fällt vermöge des in diesem §. erwiesenen noch ein Durchschnitt zwischen die erste größte Ordinate und den Anfang der Abscissen, für ein verneintes u aber nicht.

§. 171.

Man darf nur hier statt der beiden Punkte A und G, die beiden P und L betrachten, so giebt sich die Anwendung von 170. von selbsten.

§. 174.

Zu I.

Hat keine bejahte Wurzel ꝛc. ꝛc. oder eigentlich keine **mögliche** bejahte Wurzel, welches im

im Grunde ein vom vorigen verschiedener Ausdruck ist. So hat z. B. jede Zahl in der That 3. cubische Wurzeln (Alg. 241. Erl.) aber zwo davon sind allemal unmöglich, und so wird begreiflich, was ich (Alg. 576. Erl.) von den transcendentischen Linien erwähnt habe.

und weil die Summe aller Wurzeln rc. rc. sowol der möglichen als unmöglichen.

ebenfalls grade ist rc. rc. nämlich $= m$, welches hier in I. gerade angenommen wird.

beiderlei Wurzeln rc. rc. nämlich der zuvor erwähnten bejahten und verneinten möglichen.

Zu II.

Nach eben der Art rc. rc. Es liege nämlich A zwischen C und G, und weil nun hier für $x = 0$ die krumme Linie unter der Axe liegt, so muß beim ersten Durchschnitte sowol zur Rechten als zur Linken von A die krumme Linie über die Axe treten; beim zweeten Durchschnitte zu beiden Seiten von A muß sie sich hierauf wieder unter die Axe beugen, und so kommt überhaupt für jeden ersten, dritten, fünften u. s. w. ungeraden Durchschnitt die krumme Linie über, und für jeden zweiten, vierten, sechsten u. s. w. geraden Durchschnitt unter die Axe. Weil nun für ein unendliches sowol bejahtes als verneintes x die krumme Linie über die Axe tritt, so muß dieser letzte Durchschnitt allemal ein erster, dritter u. s. w. überhaupt ein ungerader sein, oder es ist von den möglichen sowol bejahten als verneinten

Wurzeln hier in II. allemal eine ungerade Anzahl vorhanden.

Zu III.

Weil nämlich bei dem äussersten Durchschnitte zur Rechten die krumme Linie über die Axe geht, welches nach II. auch vom äussersten zur Linken gilt, daferne m gerade ist, so muß für ein ungerades m bei dem äussersten Durchschnitte zur Linken die krumme Linie unter die Axe gehen (167.) woraus sich das übrige in III. verstehen läßt.

§. 175.

Die beiden Sätze dieses Lehrsatzes sind hier nicht **disjunctive**, sondern **copulative** zu verstehen.

Zu I.

S. 114. am E. **dieserwegen** rc. rc. d. h. vorausgesetzt, daß der Differentialgleichung mögliche Wurzeln lauter größte y geben, so muß die Hauptgleichung α größte y haben, und weil nun zwischen jedes Paar solcher größten y ein Durchschnitt fällt, so folgt **blos aus diesem Grunde** schon, daß es in der Hauptlinie nicht weniger als $\alpha - 1$ Durchschnitte geben könne; ob es aber nicht mehrere gebe, wird sogleich auf der folgenden Seite im Buche untersucht, wo gewiesen wird, daß es noch ausserdem 2. also überhaupt nicht mehr als $\alpha + 1$ mögliche Wurzeln für die Hauptgleichung statt finden; und weil sie zusammen m Wurzeln hat, so ist die Menge ihrer unmöglichen Wurzeln wenigstens $= m - (\alpha + 1) = m - \alpha - 1$;

Also

Also kann die Hauptgleichung nicht mehr ꝛc. ꝛc. wohl aber weniger, wenn nämlich die mögliche Wurzeln der Differentialgleichung nicht lauter größte, sondern auch kleinste y geben, wovon in II. gehandelt wird.

Zu II.

Hätte man nämlich eine mögliche Wurzel der Differentialgleichung, der kein größtes sondern ein kleinstes y zugehörte, so verschwinden 2 Durchschnitte, und es bleiben also in I nur noch $\alpha + 1 - 2 = \alpha - 1$ Durchschnitte oder so viel mögliche Wurzeln, und daher $m - (\alpha - 1) = m - \alpha + 1$ unmögliche, und so enthält also die Hauptgleichung ausser den $m - \alpha - 1$ unmöglichen Wurzeln in I. noch so viel Paare unmöglicher Wurzeln, als die Differentialgleichung mögliche Wurzeln für kleinste y enthält.

§. 176.

ob sie gröste oder kleinste geben ꝛc. ꝛc.

Jedes kleinste y nämlich, das die Differentialgleichung giebt, giebt ein Paar unmöglicher Wurzeln der Hauptgleichung (175. II.). Aber auf solche Art erhält man doch nicht der Hauptgleichung sämtliche unmögliche Wurzeln, sondern nur diejenigen, welche wegen 175. II. vorhanden sind; sie alle zu finden, müßte man überdas wegen 175. I. auch der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ unmögliche Wurzeln wissen; diese nun zu erhalten, müßte man diese erste Differentialgleichung aufs neue als eine Hauptglei-

chung ansehen, und ihre Differential = also die zwote Differentialgleichung oder $p = 0$ (155. V.) nehmen; die möglichen Wurzeln dieser zwoten Differentialgleichung in die erste gesetzt, und acht gegeben, welche unter ihnen kleinste in der ersten geben, giebt nun unmögliche Wurzeln der ersten Differentialgleichung, aber wiederum nicht alle, sondern nur diejenigen, welche von II. 175. abhängen; die übrigen unmöglichen zu finden, müßte man wieder wegen 175. I. die zwote Differentialgleichung als eine Hauptgleichung ansehen, und solcher ihre Differentialgleichung oder die dritte Differentialgleichung, also $q = 0$ (155. V.) betrachten, und daraus, wie vorhin nach 175. II. wieder unmögliche Wurzeln der zwoten Differentialgleichung suchen u. s. w. Hiervon wird nun noch in den folgenden §§. gehandelt.

§. 177.

als eine Hauptgleichung ꝛc. ꝛc. Der Deutlichkeit wegen will ich solche Hauptgleichungen, die an sich doch Differentialgleichungen sind, **respective** Hauptgleichungen nennen.

wie vorhin y gegen q ꝛc. ꝛc. oder vielmehr: wie vorhin y gegen $\frac{ddy}{dx^2}$ im Produkt $\frac{yddy}{dx^2}$ (am E. von 176.) also wie y gegen p, da $p = \frac{ddy}{dx^2}$ (155. V.) oder, welches man auch sagen kann, wie $\frac{dy}{dx}$ gegen q.

in

in $\frac{dy}{dx}$ ꝛc. ꝛc. d. i. in die respective Hauptgleichung von p, welches nach der Anweisung (176.) geschieht, damit man nachher die möglichen Wurzeln suchen könne, denen in der respectiven Hauptgleichung $\frac{dy}{dx}$ kleinste Ordinaten zugehören.

und in q ꝛc. ꝛc. solches geschieht nur, um zu sehen, was für eine solche Wurzel von $p = o$, aus q werde, damit man, nachdem man auch in $\frac{dy}{dx}$ diese Wurzel von $p = o$ gesetzt hat, sehen könne, ob das dem Produkt $\frac{yddy}{dx^2}$ am E. von 176. ähnliche Produkt $\frac{dy}{dx} . q$ verneint oder bejaht werde, ist nämlich das letztere, so ist, wie 176. am E. y, so hier $\frac{dy}{dx}$, also die Ordinate, die sich allemal wie $\frac{dy}{dx}$ verhält, ein kleinstes, und daher ein Paar Wurzel in der respectiven Hauptgleichung $\frac{dy}{dx} = o$ unmöglich (175. II.), folglich auch ein Paar Wurzeln in $y = o$ unmöglich (175. I.);

so zeigt sie ꝛc. ꝛc. nämlich unter der Bedingung, die sogleich kommt, **woferne** u. s. w.

§. 178.

daß p = o wird ꝛc. ꝛc. q aber endlich bleibt.

zu oder ab ꝛc. ꝛc. oder das y, das einem solchen x zugehört, ist kein Größtes oder Kleinstes, welches sich nach 155. VII. anders verhält, wenn ausser $\frac{dy}{dx}$ und p, auch nach q = o wird, r aber endlich ist, s. den folg. §.

und folglich in der Hauptgleichung an ꝛc. ꝛc. nach 175. I.

§. 179.

und q auf o bringt ꝛc. ꝛc. r aber endlich ist.

so zeigt dieß gewiß ein Paar ꝛc. ꝛc. und ausserdem noch ein Paar für ein bejahtes yr, wovon in diesem §. gehandelt wird.

In gegenwärtiger Bedeutung ꝛc. ꝛc. nämlich ein Größtes bejahtes.

wenn r das ihm entgegengesetzte Zeichen ꝛc. ꝛc. also ry verneint ist. Setzt man nämlich in 176. $\frac{ddy}{dx^2} = p = o = q$, so wird sich alles, was daselbst von $\frac{ddy}{dx^2}$ ist gesagt worden, auch von $\frac{d^4y}{dx^4} = r$ sagen lassen.

einerlei Zeichen bekommt ꝛc. ꝛc. also ry bejaht ist, auch nach 176. am E.

§. 180.

§. 180.

die wegen y . r = p ꝛc. ꝛc. oder eigentlich wegen y . r = o wegfallen. Mich deucht aber der hier angebrachte Schluß könnte bei Anfängern Zweifel erregen; sie würden nämlich auch umgekehrt so schliessen: wenn r y bejaht wäre, würde solches zwo unmögliche Wurzeln anzeigen (179.), die wegen y . r = o wegfallen. Daß aber in der That wegen r = o ein Paar Wurzeln unmöglich wird, erhellet eben so, wie für p = o in 178. und wenn nach der bisherigen Bedeutung die Buchstaben in der Reihe s, t, u, v u. s. w. fortgehen, so giebt es aus eben dem Grund in der Hauptgleichung, wenn auch s und t = o werden, sechs, und wenn nun noch u und v = o werden, acht unmögliche Wurzeln u. s. w.

vier unmögliche ꝛc. ꝛc. oder so viel Differentialgleichungen = o sind.

§. 182.

z. E. die Gleichung ꝛc. ꝛc. das K im letzten Glied Ka ist überflüßig. Diese Gleichung bezieht sich übrigens auf die 12. Fig. die sich von einer graden offenbar in 5. Punkten schneiden läßt, und der also eine Gleichung vom fünften Grad, wie die hier erwähnte ist, zugehört. Soll sich nun die hier zuerst erwähnte Gleichung auf die Axe KQ beziehen, so fallen, wie 167. vier Durchschnitte weg, und werden also so viel Wurzeln unmöglich (welches eben der in 180. erwähnte an sich richtige Schluß ist).

Gehör-

Gehörte in ihr z. B. zur Abscisse KQ die Ordinate QM, daß also y = QM wäre, so erhellet, daß, wenn man die nur erwähnte Gleichung vom 5ten Grad auf die Axe AP beziehen will, diese Gleichung so verändert werden müsse, daß sie für die Abscisse AP = KQ die Ordinate PM = QM — PQ = QM — KA gebe; und dieß läßt sich bewerkstelligen, wenn man nur in dem vorigen allgemeinen Werth von y noch KA abzieht, oder statt der ersten Gleichung diese setzt:

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + a - KA = y$$

die sich nun auf die Axe AP bezieht, und die fünf Durchschnitte oder lauter mögliche Wurzeln giebt.

§. 184.

Ein äusserstes ist oder nicht 167. 2c. 2c. 167. S. 105. am E.

§. 185.

Ein bejahtes Größtes sein 167. 2c. 2c. nämlich 167. S. 106. die Worte: **wenn** m **ungrade ist** u. s. w. hier nämlich ist $m = 3$.

Folglich muß $\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} - p\sqrt{\frac{1}{3}p} + r$ 2c. 2c. d. i. die Gleichung, die man erhält, wenn man in der gegebenen cubischen $x^3 * - px + r = y$ den bejahten Werth $x = +\sqrt{\frac{1}{3}p}$ substituirt.

Wenn alle drei Wurzeln 2c. 2c. so ist nämlich $\frac{1}{4}r^2 < \frac{1}{27}p^3$, oder $r^2 < \frac{4}{27}p^3$, also $\frac{r}{\sqrt{p^3}} <$

$\frac{2}{\sqrt{27}}$, oder $\frac{r}{\sqrt{p \cdot p^2}} < \frac{2}{\sqrt{3 \cdot 9}}$, folglich $\frac{r}{p\sqrt{p}} <$
$\frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}}$ oder $\frac{r}{p\sqrt{p}} < 0,3849002$

Die hier erwähnte Lambertsche Schrift ist für jeden, der sich mit algebraischen Rechnungen abzugeben hat, unentbehrlich. Den Gebrauch der Tab. a. a. O. zu erläutern, mag folgendes Exempel dienen. Es sei bei Hrn. Lamb. a. a. O. §. 89.

M.) $z^3 + 2z^2 - 33z - 90 = 0$

also $A = 2$, $B = -33$, $C = -90$;

Diese nun in eine cubische Gleichung zu verwandlen, deren zweites Glied fehlt, setze man $y - \frac{1}{3} \cdot 2$ oder $y - \frac{2}{3}$ statt z (Alg. 282.) Dieß giebt

$$
\begin{aligned}
z^3 &= y^3 - 2y^2 + \tfrac{4}{3}y + \tfrac{8}{27} \\
+ 2z^2 &= \quad + 2y^2 - \tfrac{8}{3}y + \tfrac{8}{9} \\
- 33z &= \qquad - 33y + 22 \\
- 90. &= \qquad\qquad - 90.
\end{aligned}
$$

Also wird aus M diese

N.) $y^3 - 34\tfrac{1}{3}y - 66\tfrac{22}{27} = 0$

mithin bei Hrn. Lambert $\mathfrak{C} = 34\tfrac{1}{3} = 34,333 \cdots$ und $\gamma = -66\tfrac{22}{27} = -66,8148 \cdots$ woraus sich nun $x^3 - x = \mp a = \gamma : \mathfrak{C} \cdot \sqrt{\mathfrak{C}}$ bestimmen läßt. Dieser gefundene Werth von a in der 29. Taf. aufgesucht, giebt zweene gleiche entgegengesetzte Werthe

von

von x folglich auch den dritten, hierauf x. √ C den Werth von y, und y — $\frac{2}{3}$ die drei Werthe von z.

§. 188.

Die kürzeste Reihe ꝛc. ꝛc. die sich nämlich mit + anfängt.

§. 190.

Mich deucht, daß wir in der ganzen Kästnerischen Analysis bei diesem Satze die ungemeine Schärfe, Kürze und Leichtigkeit, mit der unser Hr. Aut. die schwierigsten und selbst grossen Meßkünstlern unerweißliche Sätze zu beweisen gewohnt ist, am meisten bewundern können. Wenigstens fand ich beim Durchlesen dieser Sätze eine besondere Zufriedenheit, die ich allemal als eine Art von Belohnung für meine Bemühung ansehe. Wolf trägt diesen Satz Anfangsgr. der Alg. §. 315. no. 3. vor, und sagt in der Anmerkung zu seiner Entschuldigung folgendes: „diesen Satz, welchen Harriot zuerst durch vielen Versuch gefunden, hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweisen können, daher ihn auch Reynault in seiner analyse demontrée gar weggelassen, weil er die Regeln der Algebra demonstriren wollen.“ Ausserdem aber, daß Wolf den Beweiß, der ihm noch unbekannt war, wegläßt, trägt er den Lehrsatz selbst unrichtig so vor:

„In jeder Gleichung sind so viele wahre (d. i. „bejahte) Wurzeln als Abwechselungen der Zeichen „sind; so viele falsche (d. i. verneinte) als einerlei „Zeichen auf einander folgen“

welches

welches falsch ist, da eine Gleichung auch unmögliche Wurzeln haben kann, der erwähnte Lehrsatz aber nur von Gleichungen gilt, die lauter mögliche Wurzeln haben, also sollte Wolf **nicht mehrere** statt so **viele** gesetzt haben.

§. 192.

Also die verneinten rc. rc. oder eigentlich: die bejahten in verneinte und verneinten in bejahte.

§. 193.

Einen andern Beweis bekannt gemacht rc. rc. Man findet diesen Beweiß in die Kürze zusammengezogen auch in Hrn. Hofr. Karstens Beiträg. zur Aufn. der theor. Mathem. I. St. S. 79. wo er demohngeachtet doch noch 8 Seiten ausfüllt.

§. 194.

alle rechter Hand rc. rc. wie hier bei F und V.

§. 195.

u. s. w. Differentiallinie **verneint** rc. rc. s. die Druckfehl.

§. 196.

Zu I.

Aus 194. ist klar, daß auf ein so gefundenes x nach der Gegend, nach der x zu liegt, d. i. zur Rechten kein Durchschnittspunkt der krummen Linie mit der Abscissenaxe, sowohl bei der Hauptlinie als bei allen daraus entstandenen Differentiallinien, mehr

folgen könne, denn sonsten würde das x, kein solches x sein, wie erfodert wird. Setzt man nun in der Gleichung 163. $y = 0$, so erhält man die Gleichung

$$x^m + px^{m-1} \text{-----} + tx + u = 0 \quad (M.$$

deren Wurzeln Werthe von Abscissen sind, die von einem gewissen Anfangspunkt bis an solche Punkte reichen, wo die dieser Gleichung zugehörige Linie von der Axe geschnitten wird.

Da nun auf das vorhin gefundene x zur Rechten kein Durchschnittspunkt der krummen Linie mehr folgt, so erhellet folgendes. Die Gleichung M hat entweder bejahte Wurzeln oder nicht d. i. es giebt entweder Werthe für bejahte Abscissen, welche die krumme Linie zur Rechten schneiden oder nicht. Im ersten Fall muß das nur gefundene x über alle diese Durchschnittspunkte hinaus gehen, weil zur Rechten der ihm zugehörigen Ordinate kein Durchschnittspunkt mehr liegt; es ist also klar, daß in diesem Fall das gefundene x grösser, als selbst diejenige Abscisse ist, die bis an den entferntesten Durchschnittspunkt zur Rechten reicht, d. i. es ist in diesem Fall das nur gefundene x, das nämlich y und alle Differentialien bejaht macht, grösser als die größte Wurzel in M. Im andern Fall aber, wo nämlich M keine bejahte Wurzeln hat, wie wenn der Anfangspunkt der Abscissen, der α heissen mag, noch weiter als F gegen die Rechte läge, hat man in M keine mögliche Wurzeln, als verneinte, und die kleinste unter diesen verneinten wäre αF. Hat man nun

hier

hier ein verneintes x oder ein x von α gegen die Linke gefunden, das y und alle Differentialien bejaht macht, so muß auch für jedes kleinere verneinte x das y und alle Differentialien bejaht werden, d. i. so kann zwischen α und dem Endpunkt eines solchen verneinten x kein Durchschnittspunkt der krummen Linie liegen; folglich ist in diesem Fall das nur gefundene verneinte x kleiner als αF oder kleiner, als die kleinste verneinte Wurzel der Gleichung M.

Zu II.

Auf eben die Art ergiebt sich die Aufl. für II. Hat man nämlich durch Versuche ein x, wie hier verlangt wird, gefunden, so ist aus 195. klar, daß zur Linken der Ordinate, welche diesem x zugehört, kein Durchschnittspunkt mehr liegt. Hat also die Gleichung M verneinte Wurzeln, und man hat ein verneintes x von der erwähnten Art gefunden, so ist dieß ein x, welches wie vorhin das bejahte über alle Durchschnittspunkte zur Linken hinausgeht, also grösser, als die größte verneinte Wurzel von M ist. Giebt es hingegen in M keine verneinte Wurzel, wie wenn der Abscissen Anfangspunkt, der β heissen mag, noch weiter als der letzte Durchschnittspunkt B gegen die Linke liegt, so ist folgendes klar. Die kleinste bejahte Wurzel von M ist nun βB; will man also ein bejahtes x haben, das kleiner, als die kleinste Wurzel von M ist, so muß man von β aus ein bejahtes x nehmen, das nicht bis an B reicht; oder das überhaupt die krumme Linie nicht schneidet, oder dem eine Ordinate zugehört, zu dessen linker Seite

kein Durchschnittspunkt der krummen Linie mehr liegt. Ein solches x aber erhält man durch die für II. gegebene Auflösung; findet man demnach durch Versuche ein bejahtes x, das die m — 1te Differentialformel verneint, die m — 2te bejaht u. s. w. macht, so ist dieß ein x, das kleiner, als die kleinste bejahte Wurzel von M ist, wenn β der Anfangspunkt der Abscissen ist d. i. wenn die Gleichung M keine verneinte Wurzel hat.

§. 200.

Statt des zweiten Theils der Aufgabe 196. kann man sich nämlich der Verwandlung 192. so bedienen, daß man der gegebenen Gleichung (197.) gerade Glieder mit dem entgegengesetzten Zeichen schreibt, wie

$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120 = y$ P.)

und hiermit nun völlig nach dem ersten Theil verfährt. Dieß Verfahren gäbe hier

$$5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63 = \frac{dy}{dx}$$

$$5x^3 + 6x^2 - 15x - 15 = \frac{d^2y}{4 \cdot dx^2}$$

$$5x^2 + 4x - 5 = \frac{d^3y}{3 \cdot 4 \cdot dx^3}$$

$$5x + 2 = \frac{d^4y}{2.3.4.dx^4}$$

Macht

Macht man nun hier nach 196. I. den Versuch ob $x = + 3$, y mit allen Differentialformeln bejaht macht, so giebt sich

$$y = 243 + 162 - 270 - 270 + 189 + 120 = 714 - 540.$$

$$\frac{dy}{dx} = 405 + 216 - 270 - 180 + 63 = 684 - 430.$$

$$\frac{d^2y}{4dx^2} = 135 + 54 - 45 - 15 = 189 - 60.$$

$$\frac{d^3y}{3 \cdot 4 \cdot dx^3} = 45 + 12 - 5 = 57 - 5.$$

$$\frac{d^4y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} = 15 + 2 = 17.$$

wo alle Resultate bejaht sind; folglich ist $+3$ eine Zahl, die grösser als die größte bejahte Wurzel von

$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120 = 0$$

ist. Aber dieser Gleichung größte Wurzel ist die entgegengesetzte von der größten Wurzel der gegebenen Gleichung wegen der vorgenommenen Verwand-

lung der Zeichen (192.), folglich ist — 3 grösser, als die größte verneinte Wurzel der gegebenen Gleichung, daß sich also auf diese Art eben das, wie aus (196. II.) ergiebt.

II. Die

II. Die Integralrechnung bis auf den Abschnitt von den Quadraturen und Rectificationen die zum Kreise gehören.

§. 201-204.

(s. oben die Erläut. zu §. 1.)

Nur müssen Anfänger bemerken, daß die Integralrechnung ungleich mehr Schwierigkeiten hat, als die bisher erklärte Differentialrechnung. Selbst der Umstand, daß die Differentialien beständiger Grössen ganz wegfallen, und oft keine Spuhr mehr von diesen beständigen Grössen in den Differentialgleichungen anzutreffen sind, wenn sie gleich in den Integralgleichungen vorkommen, (s. §. 204.) erfodert oft eine genaue Ueberlegung der verschiedenen Zustände, in denen sich die veränderlichen Grössen befinden können, und einen ziemlichen Grad von Beurtheilungskraft, um im Stande zu sein, die beständige Grösse, die sich im Integral befinden kann, und wovon man im Differential gar nichts erblickt, anzugeben. Ich will in der Folge das Integral, das sich sogleich aus dem Differential ergiebt, ohne die beständige Grösse mit beigefügt zu haben, das **unvollkommene**, solches aber, worin schon die beständige Grösse mit

bemerkt worden, das **vollkommene** auch schlechtweg das Integral nennen.

Die allgemeine Auflösung der Aufgabe, die beständige Grösse in einem Integral zu finden, ist die: man setze überhaupt nach 204. in die unvollkommene Integralgleichung + C oder + Const, wodurch sie also zu einer vollkommenen wird, ob man gleich den Werth von C noch nicht weiß. Nun sehe man zu, ob man nicht einen solchen Werth einer der veränderlichen Grössen finde, für den man auch zugleich die Werthe der übrigen veränderlichen Grössen der vollkommenen Integralgleichung weiß; hat man solche zusammengehörige Werthe der veränderlichen Grössen gefunden, so substituire man sie in der vorigen Integralgleichung; dadurch ergiebt sich eine neue Gleichung, die ausser dem C lauter bekannte Grössen enthält, und woraus sich also C finden läßt. Es kann sich aber zutragen, daß es in der unvollkommenen Integralgleichung keinen Werth einer veränderlichen Grösse giebt, dem zugleich ein bekannter Werth der andern veränderlichen Grössen zugehörte; in diesem Fall ist die vollkommene Integralgleichung, in die man nämlich das Glied + Const gesetzt hat, als eine Gleichung zwischen dreien unbekannten Grössen anzusehen, wovon die eine beständig, die andern aber veränderlich sind. Da kann man also nach Willkühr festsetzen, für was für einen Werth der einen veränderlichen Grösse die andere einen gewissen Werth erhalten soll, und daraus die Const. bestimmen, die also ihrer ersten Bestim-

mung nach in solchem Fall selbst veränderlich, aber sobald sie einmal bestimmt ist, unveränderlich bleibt.

I. Ex. Wenn in der Gleichung für die Linie CD (Fig. 13.) die Abscissen auf AB genommen würden, und nun $dy = bdx$ wäre, so wäre $y = bx + C$ nun sieht man aus Betrachtung der Figur, daß für $x = 0$, $y = AC = a$ wird; dieß in $y = bx + C$ gesetzt, giebt $a = C + 0$, oder $C = a$, also die vollkommene Integralgleichung

$$y = a + bx$$

II. Ex. Es sei $dp = -dx + \frac{f^2 c^2}{4g} \cdot \frac{2dz}{z^3}$, so wird

$$p = C - x - \frac{f^2 c^2}{4gz^2} \quad (☿$$

Wüßte man aus andern Umständen, daß für $z = h$ und $x = a$, zugleich $p = k$ würde, so setze man

$$k = C - a - \frac{f^2 c^2}{4gh^2}$$

Daraus giebt sich

$$C = k + a + \frac{f^2 c^2}{4gh^2}$$

welches in ☿ gesetzt,

$$p = k + a + \frac{f^2 c^2}{4gh^2} - x - \frac{f^2 c^2}{4gz^2}$$

giebt.

III. Ex. Es sei die unvollkommene Integralgleichung $\int(e^{mx}x^{\varepsilon}dx) = e^{mx} \times$

$$\left(\frac{x^{\varepsilon}}{m} + \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{m^2} + \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}}{m^3} \cdots\cdots + \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\cdots.1}{m^{\varepsilon+1}}\right)$$

so giebt es hier keinen Werth von x, dem zugleich ein bekannter Werth von $\int(e^{mx}x^{\varepsilon}dx)$ zugehörte, oder umgekehrt; man kann also nach Willkühr annehmen, es werde für $x = 0$, $\int(e^{mx}x^{\varepsilon}dx)$ dem letzten unveränderlichen Glied $\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\cdots.1}{m^{\varepsilon+1}}$ gleich, und unter dieser Voraussetzung wird, wie von selbst in die Augen fällt Const $= 0$ d. h. daferne die angenommene Voraussetzung soll gelten können, so muß man Const $= 0$ setzen. Andere Voraussetzungen könnten nämlich auch gelten, wenn nur die Const. gehörig darnach bestimmt wird. So kann man z. B. annehmen, es verschwinde $\int(e^{mx}x^{\varepsilon}dx)$ für $x = 0$, und so wäre

$$0 = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\cdots.1}{m^{\varepsilon+1}} + \text{Const.}$$

folglich

$$\text{Const} = -\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\cdots.1}{m^{\varepsilon+1}}$$

d. h. wenn die letztere Voraussetzung gelten soll, so muß Const $= -\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\cdots.1}{m^{\varepsilon+1}}$ gesetzt werden.

Es

Es würde der Sache nicht unangemessen sein, dergleichen Integralgleichungen, wo die erste Bestimmung von Const. veränderlich ist, **unbestimmte** zu nennen.

Ausser dieser Aufsuchung der beständigen Grössen, die die Erfindung der Integralien nicht sowohl schwierig als mühsam macht, hat ausserdem in Fällen, die nicht unter denen (203.) begriffen sind, die Erfindung der unvollkommenen Integralien von gegebenen Differentialien ihre besondere Schwierigkeiten, und erfodert oft Kunstgriffe, die die tiefsten Einsichten in solche Rechnungen voraussetzen. Nun kann man sich zwar bei so verwickelten Differentialformeln dadurch helfen, daß man sie in unendliche Reihen verwandelt, und dann jedes einzele Glied dieser Reihe integrirt; aber dadurch wird man auch nie das völlige Integral erhalten, weil man nicht eine unendliche Menge von Gliedern integriren kann; nimmt indessen die Reihe ab, so kann man doch auf solche Art das Integral so genau man will, obgleich nie völlig erhalten; und dieß ist der Weg, auf dem man in der Folge die Quadratur des Kreises, und beinahe die Rectification aller krummen Linien sucht. Auch ist dieses das einzige Mittel, das man aus Wolfs Anleitung lernt, schwierige Differentialformeln zu integriren; und selbst hierinnen hat das Kästnerische Buch besondere Vorzüge, da in der Folge häufig gewiesen wird, wie man sich bei Integrirung verwickelter Differentialformeln zu verhalten habe.

§. 206.

§. 206.

s. §. 205. u. das. Erl.

§. 208.

setze man $x = 0$ ꝛc. ꝛc. man suche nämlich überhaupt in der Gleichung

$$Z = \frac{2}{3} x \sqrt{bx} + C$$

einen Werth der einen veränderlichen Grösse, für die man zugleich den Werth der andern veränderlichen Grösse weiß. Nun ist gewiß für $x = 0$, auch $Z = 0$, also kann man sich dieser Werthe hier bedienen, C zu suchen. Diese Quadratur der Parabel dient auch, verschiedene Körper zu cubiren, wovon ich schon in den Erl. der Alg. geredet habe.

Ex. Den Inhalt der Pyramide, (Fig. 14.) deren Spitze A, und Grundfläche das Vieleck a b c d e ist, zu finden.

Aufl. $Am = \mu$ sei ein Perpendikel von A auf die Grundfläche, deren Inhalt φ heissen mag, so verzeichne man eine Parabel, deren Parameter $= \frac{\mu^2}{\varphi}$; in dieser wird allemal eine Abscisse auf Am mit der ihr zugehörigen Ordinate das sein, was in der Pyramide eine gewisse Entfernung An mit dem zugehörigen Durchschnitt $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ist.

BAC sei eine solche Parabel, in der $AD = \varphi$, und folglich $BD = \mu$, so ziehe man Am, mB, mit BD, AD parallel; es wird auf solche Art das

zu

zu jedem Stück Ab gehörige bc die Fläche vorstellen, die ein Durchschnitt der Pyramide in der Entfernung Ab von A giebt, und die Summe aller solcher bc, die zwischen A und mB liegen, ist = der Summe aller Flächen, die in der Pyramide zwischen A und m liegen. Die Pyramide cubiren heißt demnach den Raum AmBcA bei der Parabel quadriren. Dieser ist nun = AmBDA — AcBDA = $(1 - \frac{2}{3}) . Am . mB = \frac{1}{3} Am . mB = \frac{1}{3} \mu\Phi$, welches also auch von dem Kegel gilt.

Die Quadratur von AmBcA gäbe sich auch unmittelbar so: für ihn ist

$$ay = x^2$$

$$\text{also} \quad ady = 2xdx$$

$$\text{und} \quad y . dx = \frac{aydy}{2x} = \frac{aydy}{2\sqrt{ay}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} dy}{2}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}} . \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy}{2 . \frac{3}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} . \frac{3}{2} . y^{\frac{1}{2}} dy}{3}, \text{ mithin}$$

$$Z = \frac{a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{y\sqrt{ay}}{3}$$

aber $\sqrt{ay} = x$, also

$$Z = \tfrac{1}{3} xy$$

Die Cubatur der Paraboloide findet sich in Erl. der Alg. und die Kugel läßt sich ebenso cubiren; also verhalten sich

Cylin-

	Cylinder	Kugel	Paraboloide und	Kegel
wie	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
oder	6	4	3	2

daferne sie alle gleiche Höhe und Grundfläche haben.

Zugleich erhellet aus der Quadratur der Parabel, daß sich dergleichen parabolische Räume wie abcade (Fig. 15.) so verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der Abscissen. Es ist nämlich

$abc : ade = \frac{2}{3} ab . bc : \frac{2}{3} ad . de = ab . bc : ad . de = x\sqrt{ax} : X\sqrt{aX} = \sqrt{x^3} : \sqrt{X^3}$ wo x, X, die zu bc, de gehörigen Abscissen sind. Und so verhalten sich die parabolische Räume aβc, aγe, wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der Ord. βc, γe.

§. 209.

Archimedes rc. rc. etwa dritthalb hundert Jahr vor Christi Geburth, er wurde nämlich 287. Jahr vor C. G. zu Syracus gebohren.

§. 210.

Es ist dieß ein Fall, wie der zweete in Erl. zu §. 204. zu dem das dritte Exempel gehörte. Man hat nämlich

$$\int (x+a)^{\frac{1}{m}} dx = \frac{m}{1+m} (x+a)^{\frac{1+m}{m}} = Z$$

zum unvollkommenen Integral. Die Bestimmung der Constante ist nun hier vielfach, da die genannte

Integral-

Integralgleichung eine unbestimmte ist, und man kann selbst einen Werth von x bestimmen, dem ein gewisser Werth von z zugehören soll. Ich will verschiedene Fälle angeben

I. Es soll für $x = - a$, $Z = 0$ werden, so erhält man die Integralgleichung

$$\frac{m}{1+m}.(-a+a)^{\frac{1+m}{m}} + Const = 0$$

also

$$Const = \frac{m}{1+m}.(a-a)^{\frac{1+m}{m}} = 0, \text{ und}$$

$$\int (x+a)^{\frac{1}{m}} dx = \frac{m}{1+m} (x+a)^{\frac{m+1}{m}}$$

II. Es soll für $x = a$, auch $Z = a$ werden, so ist

$$\frac{m}{1+m}.2a^{\frac{1+m}{m}} + Const = a$$

also

$$Const = a - \frac{m}{1+m}, 2a^{\frac{1+m}{m}}$$

und

$$\int (x+a)^{\frac{1}{m}} dx = \frac{m}{1+m} (x+a)^{\frac{1+m}{m}} +$$

$$a - \frac{m}{1+m}.2a^{\frac{1+m}{m}}$$

III.

III. Es soll für $x = 0$, $Z = a$ sein, so ist

$$\frac{m}{1+m} \cdot a^{\frac{1+m}{m}} + Const = a, \text{ also}$$

$$Const = a - \frac{m}{m+1} \cdot a^{\frac{1+m}{m}} \text{ und}$$

$$\int (x+a)^{\frac{1}{m}} dx = \frac{m}{1+m} (x+a)^{\frac{1+m}{m}}$$

$$+ a - \frac{m}{m+1} \cdot a^{\frac{1+m}{m}}$$

IV. Es soll für $x = 0$, auch $Z = 0$ werden, so wird

$$Const = - \frac{m}{1+m} \cdot a^{\frac{1+m}{m}}$$

und

$$\int (x+a)^{\frac{1}{m}} . dx = \frac{m}{1+m} . (x+a)^{\frac{1+m}{m}} -$$

$$\frac{m}{1+m} . a^{\frac{1+m}{m}}$$

$$= \frac{m}{1+m} . \left((x+a)^{\frac{1+m}{m}} - a^{\frac{1+m}{m}} \right)$$

Nun gilt es gleichviel, welches von diesen vier Integralgleichungen man beibehalten will; die vierte ist indessen hier und auch gewöhnlich die kürzeste und bequem=

bequemste, daher auch im Buche diese Voraussezzung bei dergleichen Integralien gewöhnlich angenommen wird; daß sie aber angenommen wird, ist nicht nothwendig, und oft geht es auch nicht an, wie in 243.

§. 211.

Die allgemeine Quadratur

$$Z = -\frac{a^3}{x} \quad (☿$$

die sich allemal, wenn z. B. $x = AP$ ist, auf den unendlich langen Raum MDEP bezieht, scheint zu der Absicht, wozu man eigentlich die Quadratur verlangt, nämlich den zwischen jeden zwo Ordinaten gelegenen Raum zu berechnen, unzureichend. Es giebt aber die Formel (☿) in der That auch jeden solchen einzeln Raum, wenn man sie nur gehörig anwendet. So giebt sich z. B. das Stück PpmM so:

$$1)\ DMPE = \frac{a^3}{x} = xy = AP \,.\, PM$$

$$2)\ DmpE = \frac{a^3}{X} = XY = Ap \,.\, pm$$

Demnach

$$3)\ DMPE - DmpE = AP.PM - Ap.pm$$

oder wenn der zwischen zwo Ordinaten y, Y, deren zugehörige Abscissen x, X, sind, gelegene asymptotische Raum M heißt, so ist allgemein, wenn y die kleinere und Y die grössere Ordinate vorstellt,

$$M = XY - xy.$$

Die Betrachtung des verneinten Raums fällt weg, wenn man die Coordinaten auf AF nimmt. Da wird nämlich

$$x = \frac{a^3}{y^2}, \text{ also}$$

$$y = a^{\frac{3}{2}}.x^{-\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{3}{2}}.\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

also $dZ = 2a^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a^3x} + \text{Const.}$

Nun ist $a^3 = xy^2$, also $a^3x = x^2y^2$, und daher

$$Z = 2xy + \text{Const.}$$

wo also z. E. für $x = A\nu$ (Fig. 16.) den Raum $DC\mu\nu AE$ bedeutet; dieser verschwindet nun für $x = 0$, also ist Const $= 0$, und

$$Z = 2xy$$

Dieß stimmt mit dem vorigen überein, weil der verneinte Raum $DC\mu\lambda E = DC\mu\nu A\lambda E - A\lambda\mu\nu$ $= 2xy - xy = xy$, wie zuvor nur weitläuftiger erwiesen wurde. Indessen dient der Vortrag im Buche, zu begreifen, was es eigentlich bedeute, wenn negative Räume vorkommen. Ich erinnere nur noch, daß die hier betrachtete Hyperbel die cubische heißt.

§. 212.

(Fig. 17.)

$Z = \frac{-a^{m+1}}{(m-1).x^{m-1}}$ verwandelt sich, wenn man $yx^m = a^{m+1}$ substituirt, in nachstehende

Z =

$z = \frac{-yx^m}{(m-1)x^{m-1}} = \frac{-yx}{m-1}$; wäre $m = \frac{1}{2}$, so gäbe dieß

$$Z = 2xy$$

für eine Hyperbel, die der Gleichung $y = \frac{b}{\sqrt{x}}$ zugehörte; diese hätte nur den einen Theil BCD, deren Asymptoten AF, AE wären, und der andere würde unmöglich; indessen ist es doch verstattet, eben den Theil darneben zu zeichnen; dadurch giebt sich nun eben so ein asymptotischer Raum wie in 211.

Nun lehrt die Hydraulik folgendes. Wenn (Fig. 18.) ABef ein Gerinne ist, worauf das Wasser hinablaufen soll, und wenn überall in AB, ab, cd, ef, u. s. w. das Wasser einen gleich hohen Stand haben soll, so müssen, weil sich die Geschwindigkeit des herablaufenden Wassers an diesen Orten wie die $\sqrt{}$ aus den Entfernungen von C verhält, sich die Breiten $a\beta$, $c\gamma$ u. s. w. die y heissen sollen, wie die $\sqrt{}$ aus den Entfernungen von C, die x heissen sollen, verhalten; also ist $y = \frac{b}{\sqrt{x}}$ oder $y . \sqrt{x} = b$ einer beständigen Grösse; dieß ist aber die eben erwähnte Gleichung für eine hyperbolische Linie, also müssen die Wände des Gerinnes Ae, Bf, (Fig. 2.) hyperbolisch wie (Fig. 1.) BCD, bcd gekrümmt sein. Gesetzt also, das ganze Gerinne sei Bbfg, so ist

$$Bgmf = 2Am . mg - 2AF . FB$$

also der Inhalt von der Grundfläche des ganzen Gerinnes

$$Bbfg = 4 . (Am . mg - AF . FB)$$

und wenn die Höhe der Wände a hiesse, so wäre die sämtliche Menge Wassers, die das ganze Gerinne fassen könnte =

$$4a . (Am . mg - AF . FB)$$

Anfänger sollen hier nicht hydraulische Säße lernen, sie sollen nur sehen, wie sich allgemeine theoretische Säße anwenden lassen, und deswegen wird es nicht überflüßig sein, noch ein Exempel beizubringen.

(Fig. 19.) α sei ein leuchtender Punkt, $\alpha\beta$ eine grade Linie, AB eine Fläche, auf die $\alpha\beta$ in λ senkrecht ist. Bewegt man nun $A\lambda B$ in paralleler Richtung von α gegen β, so verhält sich die Beleuchtung der Fläche in λ zu der in μ, wie $\alpha\mu^2 : \alpha\lambda^2$, zu der in ν wie $\alpha\nu^2 : \alpha\lambda^2$ wie die Optik lehrt. Wie wird sich nun die Verhältnis der Beleuchtung des parallelepipedischen Raums $A\lambda BB\mu A$ zur Beleuchtung des parallelepipedischen Raums $A\mu BB\nu A$ bestimmen lassen?

Aufl. Wenn die Beleuchtung auf jeder solchen Ebene wie (Fig. 20.) AB, y heißt, und die Entfernung von α, x, so ist allgemein $y = \frac{b}{x^2}$ (⊙ Nun ziehe man eine grade Linie $\alpha\beta$, und nehme auf ihr die Theile $\alpha\lambda$, $\alpha\mu$, $\alpha\nu$; In λ setze man eine willkühr-

führliche grade Linie λm, welche die Beleuchtung der Fläche $A\lambda B$ vorstellen soll, senkrecht; nun ist hier $\alpha\lambda = x$, $\lambda m = y$, also $\lambda m = \frac{b}{\alpha\lambda^2}$, und daraus giebt sich der Werth der beständigen Grösse

$$b = \lambda m \cdot \alpha\lambda^2$$

woraus sich nun die zu jeder Abscisse αp, αq, $\alpha\mu$, $\alpha\nu$ gehörige Ordinate $p\pi$, $q\varkappa$, $\mu\tau$, $\nu\phi$ aus der Gleichung ⊙ finden und dadurch die hyperbolische Linie $m\tau\phi$ so genau man will, verzeichnen läßt. Nun ist für die Gleichung ⊙ aus 211. allgemein

$$Z = xy$$

oder $$M = XY - xy$$

also $$\lambda\mu\tau m : \mu\tau\phi\nu = (\alpha\lambda \cdot \lambda m - \alpha m \cdot \mu\tau) : (\alpha\mu \cdot \mu\tau - \alpha\nu \cdot \nu\phi)$$

d. i. die gesammte Beleuchtung des Raums $A\lambda BB\mu A$ verhält sich zur Beleuchtung des Raums $A\mu BB\nu A$, wie

$$(\alpha\lambda \cdot \lambda m - \alpha\mu \cdot \mu\tau) : (\alpha\mu \cdot \mu\tau - \alpha\nu \cdot \nu\phi);$$

Für die Fläche AB, welche durch α gelegt wäre, erhielte man wie in 211. $\alpha F = \infty$, so daß αF und $\alpha\beta$ die Asymptoten der hyperbolischen Linie $PC\phi$ werden, wo sich der Scheitelpunkt C ergiebt, wenn man $C\alpha\lambda = 45°$ nimmt. Zugleich erfodert die Gleichung ⊙ eben die hyperbolische Linie zur Linken von αF, welches der Natur des Lichts gemäß ist, das sich auf gleiche Art zur Rechten und zur Linken ausbreitet. Also giebt die ganze Hyperbel (hier oder

Fig. 14.) eine sinnliche Vorstellung von der Art, wie das aus dem leuchtenden Punkt α ströhmende Licht, daferne ihm **gar keine** Hindernisse im Wege sind, zu beiden Seiten von α in dem parallelepipedischen Raum AABB sich bis ins Unendliche fortpflanzt, und sich nach und nach bis auf Nichts verliehrt.

Auch ergiebt sich die Verhältnis des gesammten durch diesen unendlichen Raum ströhmenden Lichts z. B. zu dem, das zwischen AλB und AμB hinströhmt =

$$h : (\alpha\lambda . \lambda m - \alpha\mu . \mu\tau)$$
$$= 6 . \alpha g . gC : (\alpha\lambda . \lambda m - \alpha\mu . \mu\tau)$$

Von den logarithmischen Differentialien.

§. 213.

Die jetzt folgende Lehre ist eine von den wichtigsten in der ganzen Anal. des Unendl. und ihre Anwendung unentbehrlich, da die hyperbolische Logarithmen, die in der Folge betrachtet werden, nicht etwa nur zur Abkürzung anderer Rechnungen dienen, sondern häufig als besondere Quantitäten gebraucht werden, wie Alg. 105. wo sich die Logarithmen auch auf die hyperbolische beziehen könnten, wie unten 227. gewiesen wird. Demohngeachtet findet man beim Wolf diese Lehre auf einem einzigen Blat S. 1890.

1890. und 1891. nur wie im Vorbeigehen berührt.

Zu I.

keine ganze Zahl rc. rc. s. die Erl. der Alg. S. 17. no. II. u. S. 6. no. II.

Zu II.

die logarithmische rc. rc. Ein Exempel von ihr habe ich in den Erl. der Alg. S. 445. f. beygebracht.

§. 214.

Die Absicht dieses und des folgenden §. ist eine Vorbereitung zur Bestimmung der Subtang. $\frac{ydx}{dy}$, auf der die wahre Natur jeder krummen Linie und also auch der logarithmischen beruht.

Gegenwärtiger §. giebt nun die Hauptfolge, daß jeder Ausdruck, der blos m und q, wenigstens ausserdem keine veränderliche Grössen, enthält, eine unveränderliche Grösse ist, sobald er sich auf eine bestimmte logarithmische Linie bezieht.

§. 215.

von einem Paare Ordinaten rc. rc. die nämlich zu den Abscissen x, x + m gehören.

Der Ausdruck $n = y \cdot q$ giebt $\frac{y}{n} = \frac{1}{q}$, also $\frac{y \cdot m}{n} = \frac{m}{q}$; weil nun $\frac{m}{q}$ nach dem Schluß, den

der 214. §. Erl. gab, eine beständige Grösse ist, so muß es auch $\frac{y.m}{n}$ sein, welches den Ausdruck für die Subtangente giebt, wenn man m, n, unendlich klein annimmt. s. den folg. §.

§. 219.

Zu I.

ungereimt ist rc. rc. Den Grund dieser Ungereimtheit findet man oben §. 15. das. Erl.

Zu IIII.

so ist $\frac{ly}{a} = f\left(\frac{dy}{y}\right)$ rc. rc. weil nämlich aus 218.

$$\frac{x}{a} = f\left(\frac{dy}{y}\right)$$

und hier $x = ly$ ist.

und hat man ein Mittel rc. rc. oder auch umgekehrt: und weiß man ly, so giebt dieser Logarithme durch a dividirt das Integral von $\frac{dy}{y}$.

§. 220.

Die Zahl, deren Logarithmen man sucht, heisse y, und u sei was für eine Zahl man will, so ist

$$y = 1 + u$$

folglich,

folglich, wenn $x = l y$ gesetzt wird,

$$dx = a . \frac{du}{1 + u}$$

Dieß Differential zu integriren, muß man nach Erl. 201. verfahren, und es zuvor in eine unendliche Reihe verwandlen, und dann Glied vor Glied integriren. Setzt man $a = 1$, so giebt solches natürliche Logarithmen (225.)

Ex. Den natürlichen Logarithmen von 1, 5 zu finden.

Hier ist $u = 0,5$; also für $a = 1$,

$$\begin{aligned} x = l\,1,5 = &\ 0,500000 - 0,125000 \\ &+ 0,041666 - 0,015625 \\ &+ 0,006250 - 0,002604 \\ &+ 0,000180 - 0,000001 \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \hline &= 0,548 \text{---} - 0,143 \text{---} \end{aligned}$$

oder

$$l\,1,5 = 0,405 \text{----}$$

wo die nur berechnete Zahlen bis auf die dritte Decimalstelle gewiß richtig sind.

§. 221.

Die Aufgabe, deren Auflösung hier gesucht wird, ist eigentlich folgende:

Die zu einem gegebenen Logarithmen x gehörige Zahl y zu finden.

Weiß man nämlich u, so ist auch $1 + u = ly = x$ gefunden, und also hat man nur den Werth von u zu suchen nöthig.

§. 222.

Für die Zahl y, deren Logarithmen $x = a$ ist, erhält man also

$$y = 1 + u = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \text{----}$$

Bedient man sich nun der Buchstaben A, B, C, D &c. so, daß $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{A}{3}$, $C = \frac{B}{4}$, $D = \frac{C}{5}$ u. s. w. so hat man

$$1 + 1 = 2{,}0000000000000000000000000000$$

$$A = \frac{1}{2} = 0{,}5000000000000000000000000000$$

$$B = \frac{A}{3} = 0{,}1666666666666666666666666666$$

$$C = \frac{B}{4} = 0{,}0416666666666666666666666666$$

$$D = \frac{C}{5} = 0{,}0083333333333333333333333333$$

$$E = \frac{D}{6} = 0{,}0013888888888888888888888888$$

$$F = \frac{E}{7} = 0{,}0001984126984126984126984$$

$$1 + 1 + A \text{---} + F = 2{,}7182539682539682539682537$$

$$1+1+A---+F = 2{,}7182539682539682539682537$$

$$G = \frac{F}{8} = 0{,}0000248015873015873015873$$

$$H = \frac{G}{9} = 0{,}0000027557319223985890652$$

$$I = \frac{H}{10} = 0{,}0000002755731922398589065$$

$$K = \frac{I}{11} = 0{,}0000000250521083854417187$$

$$L = \frac{K}{12} = 0{,}0000000020876756987868098$$

$$M = \frac{L}{13} = 0{,}0000000001605904383682161$$

$$N = \frac{M}{14} = 0{,}0000000000114707455977297$$

$$O = \frac{N}{15} = 0{,}0000000000007647163731818$$

$$P = \frac{O}{16} = 0{,}0000000000000477947733238$$

$$Q = \frac{P}{17} = 0{,}0000000000000028114572543$$

$$R = \frac{Q}{18} = 0{,}0000000000000001561920696$$

$$1+1+A---+R = 2{,}7182818284590452267081165$$

1+1

$$1+1+A \cdots + R = 2{,}7182818284590452267081165$$

$$S = \frac{R}{19} = 0{,}0000000000000000082206352$$

$$T = \frac{S}{20} = 0{,}0000000000000000004110317$$

$$U = \frac{T}{21} = 0{,}0000000000000000000195729$$

$$V = \frac{U}{22} = 0{,}0000000000000000000008896$$

$$W = \frac{V}{23} = 0{,}0000000000000000000000386$$

$$X = \frac{W}{24} = 0{,}0000000000000000000000016$$

$$Y = \frac{X}{25} = 0{,}0000000000000000000000000$$

---

also $1+u = 0{,}7182818284590452353602861$

wo um kein $\frac{1}{10^{25}}$ mehr gefehlt ist.

§. 223.

Daraus erhellet auch die Möglichkeit, aus der gegebenen Subtangente einer logarithmischen Linie ihre Basis d. i. die Zahl, deren Logarithme $= 1$ ist, zu finden, daß wenigstens letztere durch erstere bestimmt wird. Die Basis heisse nämlich c, so kann man $c = \frac{1+u}{1-u}$ setzen, und man hat

l

$$\frac{l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)}{2a} = u + \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{7}u^7 - - - -$$

aber für $\frac{1+u}{1-u} = c$ ist $l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 1$, also

$$-\tfrac{1}{2}a + u + \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{7}u^7 - - - - = 0$$

oder

$$\tfrac{1}{2}a - u - \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{7}u^7 - - - - = 0\ (☿$$

wo man die Wurzel dieser Gleichung suchen muß, um u zu haben, und daraus ergäbe sich $\frac{1+u}{1-u} = c$. Aus Betrachtung der Gleichung ☿ fließt aber auch noch folgender merkwürdige Satz. Die Potenz von u steigt in ihr ohne Aufhören bis zu u^∞, und die Gleichung enthält unendlich viele Glieder, die ausser dem ersten ($\frac{1}{2}a$) alle verneint sind; sie hat also nur eine einzige Abwechslung und **unendlich** viele Folgen. Vergleichen wir dieses mit 190, 191, so folgt, daß die Gleichung ☿ nur eine mögliche bejahte, aber unzählig viele entweder verneinte oder unmögliche Wurzeln enthalte. Daß sie aber hier keine verneinte Wurzel enthalten kann, erhellet so: sie enthält lauter ungrade Potenzen von u; wäre also u verneint, so wären auch alle die in der Gleichung vorkommende Potenzen u, u^3, u^5 - - - - verneint, folglich alle Glieder, weil sie das Zeichen (—) vor sich haben, bejaht; und weil es unmöglich ist, daß eine Reihe von lauter bejahten Gliedern zu dem bejahten

$\frac{1}{2}a$ addirt die o ausmache, so ist klar, daß es keine Wurzel geben kann die verneint wäre, oder u hat ausser dem einen möglichen bejahten noch unzählig viele unmögliche Werthe; also giebt es auch für

$\frac{1+u}{1-u} = c$ folglich auch für l c nur einen möglichen

aber unzählig viele unmögliche Werthe, und weil überhaupt $y = c^x$, so gilt eben das allgemein von ly, d. h. es gehören in jedem logarithmischen System jeder Zahl nur ein möglicher aber unzählig viele unmögliche Logarithmen zu; man kann nun auch schliesen, weil $y = c^x$ und c nur einen möglichen aber unzählig viele unmögliche Werthe hat, so muß auch das zu jedem x gehörige y unzählig viele unmögliche aber nur einen möglichen Werth haben, welches zugleich den Satz Alg. 576. u. das. Erl. S. 231. beweist, und die dort gegebene Erklärung transcendentischer Linien rechtfertigt. Der Hr. Aut. erwähnt diesen Satz (234.) und bringt erst weiter unten (332.) den Beweiß dazu bei. Mir war es desto angenehmer, daß er sich auf die nur erwähnte Art so leicht und kurz aus 223. herleiten liesse. Es zeigt übrigens auch der gegebene Beweiß, daß kein verneintes c möglich ist, d. h. kein solches verneintes c, dem ein Logarithme zugehörte, folglich überhaupt keine solche verneinte Zahl, oder: verneinter Zahlen Logarithmen sind unmöglich. Daraus folgt aber nicht schlechterdings, daß überhaupt Grössen, die Logarithmen verneinter Grössen enthalten, unmöglich sind, so wenig dieser Schluß in Anal. endl.

Gr.

Gr. bei eingebildeten Grössen angeht. Man kann hier folgende Sätze bemerken:

I. Eine grade Anzahl von Logarithmen verneinter Grössen giebt allemal in ihrer Summa oder Differenz eine mögliche Zahl, weil der Logarithme des Produkts oder Quotientens, die alsdann allemal bejaht sind, mit dieser Summe oder Differenz einerlei ist,

z. E. $(l - a) + (l - b) = l(-a).(-b)$ $= l\,a\,b$ also möglich; eben so $(l - a) - (l - b)$ $= l\left(\frac{-a}{-b}\right) = l\,\frac{a}{b}$ gleichfalls möglich.

II. Eine ungrade Anzahl aber aus eben der Ursache eine unmögliche,

z. E. $(l - a) + l(-b) + l(-c) = l - a\,b\,c$ also unmöglich.

III. Logarithmen verneinter Grössen mit einander multiplicirt, giebt eine unmögliche Grösse; denn es ist

$$l(-a) . l(-b) = l(-b^{l-a})$$

Nun ist $l(-a)$ eine unmögliche Grösse, also $-b^{l(-a)}$ eine unmögliche Potenz einer möglichen Grösse, mithin selbst eine unmögliche Grösse; und eine unmögliche Grösse kann keinen möglichen Logarithmen haben.

IV. Auch Logarithmen verneinter Grössen mit einander dividirt, geben was unmögliches, weil

$l(-a)$

$$\frac{l(-a)}{l(-b)} = l(-a).(l(-b))^{-1} = \left(-a^{(l-b)^{-1}}\right)$$

wovon eben der vorige Schluß gilt.

So dienen also auch Logarithmen verneinter Grössen auf eben die Art, wie die eingebildeten bei Aufgaben zu beurtheilen, ob man eine mögliche oder unmögliche Voraussetzung angenommen hat.

Ex. Es sei von einer geometrischen Reihe das erste Glied $= -4$, das letzte $= -12500$ und der Exponent $= -5$ gegeben; man soll die Anzahl der Glieder finden; so ist aus Erläut. der Alg. S. 17. no. II. 1.

$$n = \frac{lu - la}{lc} + 1$$

$$= \frac{l(-12500) - l-4}{l-5} + 1$$

$$= \frac{l\left(\frac{-12500}{-4}\right)}{l(-5)} + 1$$

$$= \frac{l\,3125 + l(-5)}{l(-5)}$$

oder

$$n = \frac{l(-15625)}{l(-5)} \;(\odot$$

also n unmöglich, wie auch aus Betrachtung der geometrischen Reihen folgt, da nämlich u das Zeichen

chen + oder — 1 vor sich hat, nachdem n grad oder ungrad ist, wenn übrigens sowohl a als e verneint sind. Hier nun wäre offenbar die geometrische Reihe, ohne Rücksicht auf die Zeichen diese

4, 20, 100, 500, 2500, 12500

oder das letzte Glied 12500 kann nicht anders entstehen als für n = 6, oder daß n eine grade Zahl wäre; aber für ein grades n kann u nicht verneint werden, also wird aus diesem Grund ein anderer Werth von n erfodert, der ungrad sein müßte; und n muß auf diese Art zugleich gerad und ungerad sein d. i. es ist unmöglich. In gegenwärtigem Exempel würde man also auch ohne die Gleichung ⊙ und die Regel (IIII.) die Unmöglichkeit des Werths von n einsehen, in andern Fällen aber, wo für lauter bejahte a, e, und u, n keine ganze Zahl ist, läßt sich die Unmöglichkeit von n ohne die Gleichung ⊙ nicht so leicht beurtheilen. Man müßte nämlich in solchen Fällen die geometrische Reihe, wie die arithmetische Erl. der Alg. S. 9. ergänzen, um zu sehen, ob in der so ergänzten Reihe n grad oder ungrad wäre; dazu aber würde eine genaue Ergänzung erfodert, die wegen des Quotienten $\frac{lu - la}{le}$, wo man lu, la, le, selbst nicht ganz genau hat, nicht angeht, und da zeigt sich besonders der Gebrauch der Regel IIII. Wäre z. B. u = — 868, das übrige wie vorhin, so erhielte man nach gehöriger Rechnung

$$n = \frac{l(-1080)}{l(-5)}$$

also wegen IIII. unmöglich; daraus folgt, daß $\frac{l\,1080}{l\,5}$ ein uneigentlicher Bruch sein muß, der in seinen kleinsten Zahlen ausgedruckt zum Zähler eine gerade Zahl hat, wie Erl. der Alg. a. a. O. der Zähler 26 ist.

Dieses Exempel wird zugleich ein Beweiß sein, daß ich bei Betrachtung der geom. Reihen a. a. O. nicht zu weitläuftig gewesen bin. Hier will ich mich nur noch der Gelegenheit bedienen, eine Erinnerung zu Erl. der Alg. S. 366. zu machen. Eingebildete Grössen heissen nämlich insbesondere die zwote, vierte u. s. w. überhaupt gerade Wurzeln aus verneinten Grössen, alle übrige Grössen, deren Eigenschaften ihrem Dasein widersprechen, behalten den allgemeinen Namen der unmöglichen Grössen. Dahin gehören nun die Logarithmen verneinter Grössen; ingleichem solche Grössen, wie

$$x < 2{,}64 > 2{,}71$$

Erl. der Alg. §. 303. S. 88.

§. 224.

Aus $\frac{1+u}{1-u} = N$ folgt $N - Nu = 1 + u$, oder $N - 1 = Nu + u = (N+1) \cdot u$, also

u =

$$u = \frac{N - 1}{N + 1}$$

Aus $1 = a \cdot 2 \left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} \cdots \right)$

gäbe sich a in den paar ersten Decimalstellen so:

$$1 = a \cdot 2 \cdot 1,147 \cdots$$

$$\text{und } a = \frac{1}{2,294} = 0,43 \cdots$$

Eine genauere Berechnung giebt

$$a = 0,434\ 294\ 480\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 916\ 6 \cdots$$

Dieß ist also die Subtangente für ein logarithmisches System, dessen Basis 10 ist, (*) wie für das Brigische.

§. 225.

Im natürlichen Logarithmen-System gehört also $x = a = 1$ als Logarithme zur Zahl 2,718281 ---- (222.) oder die natürliche Logarithmen machen dasjenige System aus, das $c = 2,718281 \cdots$ zur Basis hat.

K 2 §. 226.

(*) ich nenne Basis die Zahl, deren Logarithmen 1 ist. Eigentlich ist es willkührlich, welche man die Basis nennen will, und man kann daher die Subtangente selbst die Basis nennen, wie Hr. Lambert in seinen Zusätzen S. 134. thut.

§. 226.

Zur Probe will ich die Berechnung von $l\frac{3}{2}$ herſetzen. Man ſetze alſo $\frac{1+u}{1-u} = \frac{3}{2} = N$, ſo iſt aus (224.) $u = \frac{N-1}{N+1} = \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{5}$, alſo

$$l\frac{3}{2} = \frac{2}{5}\cdot\left(1 + \frac{1}{3\cdot 25} + \frac{1}{5\cdot 25^2} + \frac{1}{7\cdot 25^3}\cdots\right)$$

Nun iſt

$A = \frac{2}{5} \quad = 0{,}40000000000000000000$
$B = \frac{1}{25}A = 0{,}01600000000000000000$
$C = \frac{1}{25}B = 0{,}00064000000000000000$
$D = \frac{1}{25}C = 0{,}00002560000000000000$
$E = \frac{1}{25}D = 0{,}00000102400000000000$
$F = \frac{1}{25}E = 0{,}00000004096000000000$
$G = \frac{1}{25}F = 0{,}00000000163840000000$
$H = \frac{1}{25}G = 0{,}00000000006553600000$
$I = \frac{1}{25}H = 0{,}00000000000262114000$
$K = \frac{1}{25}I = 0{,}00000000000010485760$
$L = \frac{1}{25}K = 0{,}00000000000000419430$
$M = \frac{1}{25}L = 0{,}00000000000000016777$
$N = \frac{1}{25}M = 0{,}00000000000000000671$
$O = \frac{1}{25}N = 0{,}00000000000000000027$
$P = \frac{1}{25}O = 0{,}00000000000000000001$

Die

Die letzte Ziffer bei O ist nämlich der 7 weit näher als der 6, daher hier die 7 steht.

Dividirt man nun die berechneten Zahlen nach der Reihe, wie es der Ausdruck für $l\frac{3}{2}$ erfodert, mit 1, 3, 5, 7----, so erhält man dadurch die 15 ersten Glieder der Reihe für $l\frac{3}{2}$, und der Augenschein zeigt, daß man nur 14 davon nöthig hat, um den $l\frac{3}{2}$ bis auf 20 Decimalstellen richtig zu finden. Die Division giebt nun folgendes:

$$A = 0,40000000000000000000$$

$$\frac{B}{3} = 0,00533333333333333333$$

$$\frac{C}{5} = 0,00012800000000000000$$

$$\frac{D}{7} = 0,00000365714285714285$$

$$\frac{E}{9} = 0,00000011377777777777$$

$$\frac{F}{11} = 0,00000000372363636363$$

$$\frac{G}{13} = 0,00000000012603076923$$

$$\frac{H}{15} = 0,00000000000436906666$$

$$A + \frac{H}{15} = 0,40546876525086159632$$

$$A + \frac{H}{15} = 0,40546876525086159632$$

$$\frac{I}{17} = 0,00000000000001542023 5$$

$$\frac{K}{19} = 0,000000000000000551882$$

$$\frac{L}{21} = 0,0000000000000000 19973$$

$$\frac{M}{23} = 0,0000000000000000000729$$

$$\frac{N}{25} = 0,00000000000000000000027$$

$$\frac{O}{27} = 0,000000000000000000000001$$

also $1\frac{1}{2} = 0,405465108108164381 9$ ------

Auf eben die Art geben sich nun auch die natürliche Logarithmen der Zahlen $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ rc. woraus man die Logarithmen der Zahlen 1 — 10 findet. Die Rechnungen selbst herzusetzen, wäre überflüßig. Die Resultate davon sind folgende:

log 1 = 0,00000000000000000000000

log 2 = 0,69314718055994530941

log 3 = 1,09861228866810969139

log

log 4 = 1,3862943611198906188
log 5 = 1,6094379124341005746
log 6 = 1,7917594692280550008
log 7 = 1,9459101490553133051
log 8 = 2,0794415416798359282
log 9 = 2,1972245773362193827
log 10 = 2,302585092994045684.

Der letzte ist auch im Buche angemerkt. Ich habe diesen mit den vorhergehenden acht Logarithmen aus Hrn. Lamberts Zusätzen rc. hergesetzt, der sie aber aus Hrn. Eulers Anal. finit. genommen hat. Ich verschweige diesen Umstand deßwegen nicht, weil der Hr. Aut. in seinen astron. Abh. a. a. O. S. 20. sagt:

„Ich bin mit einer solchen Verschwiegenheit „nicht recht zufrieden --- solche Tafeln nimmt „man ja auf Treu und Glauben an, und da „ist es natürlich, daß man zu wissen wünscht, „wem man glaubt.“

Nun führt aber Hr. Tempelhof Anal. des Unendl. I. Th. S. 282. auch die Logarithmen der Zahlen 2 — 10 an, die aber von den hergesetzten insgesamt in der 19ten und 20ten Decimalstelle abweichen, der l 10 weicht schon in der 18ten, und l 7 gar schon in der 8ten Decimalstelle ab, wodurch sich also Niemand darf irre machen lassen.

Aus dem bisherigen könnte man nun noch andere Formeln herleiten, deren Gebrauch in besondern

Fällen bequemer wäre. So hat man aus 223. für die natürliche Logarithmen

$$l(1+u) = u - \tfrac{1}{2}u^2 + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} \cdots$$

setzt man nun $au = z$, so hat man $u = \frac{z}{a}$; diesen Werth statt u gesetzt, giebt

$$l(1+u) = l\left(\frac{a+z}{a}\right) = \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} \cdots$$

und weil $l\left(\frac{a+z}{a}\right) = l(a+z) - la$, so wird ⊙)

$$l(a+z) = la + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} \cdots$$

welches zugleich zeigt, wie sich la ändert, wenn aus a, $a+z$ wird.

Zu wirklicher Berechnung der Logarithmen ist, besonders wenn man die nur erwähnten der zehn ersten Zahlen als bekannt annimmt, die Formel ⊙ überaus geschickt, weil, wenn man $z = 1$ setzt, der Werth von $l(a+1) = la + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} \quad \frac{1}{3a^3}$ durch eine Reihe ausgedruckt wird, die sich ungemein schnell nähert. Man kann sich aber dennoch bei wirklicher Berechnung einer noch bequemeren

Reihe bedienen. Man erhält nämlich aus der Reihe für $l(1 - u)$ (223) völlig wie vorhin

$$l(a - z) = la - \left(\frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} \cdots\right)$$

folglich

$$l(a + z) - l(a - z) = la - la + \frac{z}{a} + \frac{z}{a}$$

$$- \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} + \frac{z^4}{4a^4} \cdots$$

$$= \frac{2z}{a} + \frac{2z^3}{3a^3} + \frac{2z^5}{5a^5} \cdots\cdots$$

und daher für $z = 1$, (☾.)

$$l(a + 1) = l(a - 1) + \frac{2}{1.a} + \frac{2}{3.a^3} + \frac{2}{5.a^5} \cdots$$

wo die Potenzen im Nenner immer um 2 steigen, so wie die Coëfficienten womit diese Potenzen multiplicirt sind. Ich bediene mich selbst bei der Berechnung der hyperbolischen Logarithmen, womit ich einige Nebenstunden zubringe, dieser letztern Reihe; weil ich indessen aus einem Scheingrund die ⊙ anfangs für bequemer hielte, so habe ich die hier beigefügten hundert Logarithmen meistens nach ihr berechnet.

Die Erwähnten sind solche Reihen, von denen 224. geredet wird. Daß aber die Reihe

$$l\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right) = 2u\left(1 + \tfrac{1}{3}u^2 + \tfrac{1}{5}u^4 + \tfrac{1}{7}u^6 \cdots\right)$$

blos die Möglichkeit zeigt, jeder Zahl ihren Logarithmen zu berechnen, zur wirklichen Verfertigung logarithmischer Tabellen aber ganz und gar unbrauchbar ist, läßt sich leicht begreifen. Ist nämlich die Zahl, deren Logarithmen diese Reihe giebt, N, so ist $u = \frac{N - 1}{N + 1}$, also $u^2 = \frac{N^2 - 2N + 1}{N^2 + 2N + 1} = \frac{N.(N-2) + 1}{N.(N+2) + 1}$, und dieser Quotient ist gar bald, und schon für $N = 10$, nicht mehr von $\frac{N-2}{N+2}$ sehr merklich verschieden. Für $N = 10$ wäre nämlich $u = \frac{10 - 1}{10 + 1} = \frac{9}{11}$, also $u^2 = \frac{81}{121}$, und $\frac{N-2}{N+2} = \frac{8}{12} = \frac{81}{121,5}$ und für $N > 10$ trift dieses noch weit genauer zu. Z. E. Für $N = 100$ wäre $u = \frac{100 - 1}{100 + 1} = \frac{99}{101}$, also $u^2 = \frac{9801}{10201}$ und $\frac{N-2}{N+2} = \frac{98}{102} = \frac{9801}{10201,04}$. Also nähert sich die Reihe 223. nur wie folgende

$$2u.\left(1 + \frac{N-2}{3.(N+2)} + \frac{(N-2)^2}{5.(N+2)^2} + \frac{(N-2)^3}{7.(N+2)^3} \cdots\right)$$

da

da die Potenzen jedesmal um 1. steigen. Ausserdem ist nun aber auch der Bruch $\frac{N-2}{N+2}$ desto beträchtlicher und der 1. desto näher, je grösser N ist. Die erwähnte Reihe nähert sich daher für grosse N fast unmerklich von Glied zu Glied, und bei ihrem Gebrauch würde daher Methusalas Alter noch nicht hinreichend sein, dergleichen logarithmische Tafeln bis auf 10000 zu berechnen, wie die hier beygefügten sind.

Anfängern zu gefallen will ich nun noch ein Exempel beifügen, woraus sie desto deutlicher ersehen können, wie sich die Formel (D) bequem gebrauchen läßt. Aus den beigefügten Logarithmen hat man l 171, nämlich

$$l\,19 = 2{,}94443\ 89791\ 664$$
$$l\ \ 9 = 2{,}19722\ 45773\ 362$$

also $l\,171 = 5{,}14166\ 35565\ 026$

Daraus giebt sich nun vermittelst der Formel C l 173 so: $172^2 = 29584$

$$l(172+1) = l\,171 + \frac{2}{1.172} + \frac{2}{3.173^3} + \frac{2}{5.172^5}$$

2,00

2,00	2 : 172	2 : 172³	2:172⁵
	0,01162,79069,76744	3930,47153	13285
172	29584	29584	
280	88742	97207	
172	275270	88752	
1080	266256	84551	
1032	90146	59168	
480	88752	253835	
344	139497	236672	
1360	118336	171633	
1204	211616	147920	
1560	207088	23713	
1548	45287		
1200	29584		
1032	157034		
1680	147920		
1548	91144		
1320	88752		
1204	2392		
1160			
1032			
1280			
1204			
760			
688			
720			
688			
32			

Diese Quotienten nun ferner durch 1, 3, 5, dividirt, und zu l 171 addirt, giebt:

l 171

$$l\,171 = 5,14166\;35565\;026$$

$$\frac{2}{172} = 0,01162\;79069\;767$$

$$\frac{2}{3.172^3} = 0,00000\;01310\;157$$

$$\frac{2}{5.172^5} = 0,00000\;00000\;026$$

also $l\,173 = 5,15329\;15944\;977$

wo in der 13ten Decimalstelle 7 statt 6 steht, weil durch die Addition der 14ten Decimalstelle noch 1 hinzukommt.

§. 227.

Weil nun die Subtangente der natürlichen Logarithmen = 1, der Briggischen = 0,43429--- also letztere noch nicht halb so groß als erstere ist, so können auch die Briggischen Logarithmen von einerlei Zahlen noch nicht halb so groß sein, als die natürlichen; sie sind nämlich nur 0,43429--- wenn die natürlichen 1 sind, und man erhält also jene aus diesen, wenn man diese mit 0,43429--- multiplicirt, wie §. 231. erinnert wird.

Es folgt ausserdem aus dem im Buche erwiesenen Satz, daß Quotienten von Logarithmen allemal gleich groß sind, aus was für einem System sie auch genommen werden z. E. der Quotient $\frac{lu - la}{le}$

(Alg.

(Alg. 105.) bleibt für Briggische und für natürliche Logarithmen einerlei.

§. 230.

Diese Aufgabe ist mit dem Ex. 224. einerlei, es ist nämlich dort a, was hier b ist, und man erhält daher auch hier die dort angegebene Zahl. Man kann also auch ohne log 10 zu wissen, b finden, aber die Division $\frac{1}{\log 10}$ giebt b bequemer, als die Rechnung im Ex. 224. wenn man b in vielen Decimalstellen verlangt.

§. 231.

Umgekehrt giebt sich der natürliche Logarithme, wenn man den Briggischen mit 0,43429--- dividirt, d. i. mit $\frac{1}{0,43429\text{---}}$ multiplicirt. Nun ist aber $\frac{1}{l\,10} = 0,43429\text{---}$ aus (230.) also

$$\frac{1}{0,4329\text{---}} = l\,10 = 2,30258\text{----}\ (226.)$$

mithin geben sich die natürlichen Logarithmen aus den Briggischen, wenn man diese mit 2,3025---- multiplicirt. Man sieht aber leicht, daß man auf solche Art aus den gewöhnlichen Briggischen Logarithmentafeln die natürlichen Logarithmen nicht bis über 7 Decimalstellen richtig erhalten kann; höchstens bis auf sieben, und hierzu wäre es unnöthig,

die Zahl 2,3025 --- weiter als bis auf die achte Decimalstelle zu gebrauchen.

Wer die Sherwinsche Tafeln hat, wo sich die Briggischen Logarithmen aller Primzahlen von 1 — 1000 bis auf 61 Decimalstellen berechnet finden, kann sich solcher nebst der Formel (⊙) 226. bedienen, einer jeden Zahl, die grösser als 1000 ist, ihren natürlichen Logarithmen in so viel Decimalstellen zu berechnen. Er muß nämlich einige Primzahlen, deren Logarithmen er in den Tafeln hat, aufsuchen, die in ihrem Produkt der gegebenen Zahl (z. E. 7450) sehr nahe kommen (z. E. 17, 19, 23). Die Logarithmen dieser Primzahlen aus den Tafeln genommen, in natürliche verwandelt, und dann addirt, giebt den natürlichen Logarithmen des Produkts (also hier den $l\,7429 = l\,17 + l\,19 + l\,23$). Nennt man also dieß Produkt (hier 7429) a, und den Unterschied dieses Produkts von der gegebenen Zahl (hier $7450 - 7429 = 21$) z, so giebt die Gleichung ⊙

$$l(a+z) = la + \frac{z^1}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} ----$$

den natürlichen Logarithmen der gegebenen Zahl, wo sich die Reihe sehr schnell nähern muß, weil z gegen a sehr klein ist. Hier also wäre

$$l\,7450 = l\,17 + l\,19 + l\,23 +$$

$$\frac{21}{7429} - \frac{441}{110380082} + \frac{9261}{1230020443767} ----$$

$= l$

$= l\,17 + l\,19 + l\,23 +$

$0{,}0028267\ldots - 0{,}00000399\ldots + 0{,}00000000\ldots$

wo sich die Reihe überaus schnell nähert. Zur Probe kann man die natürlichen Logarithmen aus den kleinern Tafeln des Hrn. Lamberts Tab. XIII. für das berechnete Exempel nehmen. Man hat nämlich

$$l\,17 = 2{,}8332133$$
$$l\,19 = 2{,}9444390$$
$$l\,23 = 3{,}1354942$$

also $l\,7429 = 8{,}9131465.$

und die Summe der nur berechneten drei Glieder $= 0{,}0028227$, also $l\,7450 = 8{,}9159692$, diesen mit $0{,}43429\ldots$ multiplicirt (*) giebt $8{,}91596\ldots \times 0{,}43429\ldots = 3{,}8721122$, welches nach den gewöhnlichen Tafeln der Briggischen Logarithme ist, der zu 7450 gehört, wie man z. B. in Vlacqs seinen findet. Der Sherwinschen Tafeln wird man sich indessen auf solche Art zur Abkürzung weitläuftiger Rechnungen nicht bedienen, weil man das Mittel zu dieser Abkürzung erst durch eben so weitläuftige Rechnungen suchen müßte. Indessen giebt es Fälle, wo man die natürliche Logarithmen selbst als absolute Grössen in Rechnungen gebraucht, und da könnte

(*) Wie weit man Decimalbrüche mit einander multipliciren müsse, um das Produkt bis auf eine gewisse Decimalstelle richtig zu erhalten, muß man aus der Arithm. wissen.

könnte man sich des angegebenen Mittels bedienen, den natürlichen Logarithmen einer jeden gegebenen Zahl sehr genau zu finden. Man vergleiche hiermit Hrn. Lamberts Erinnerung §. 58. in dem 233. VII. angeführten Buche. Zugleich erhellet aus gegenwärtigem §. 231. wie sich log Brigg. e (§. 222.) bestimmen läßt, den man oft braucht. Es ist nämlich log. nat. e = 1, also log. Brigg. e = (0,43429--) . 1 d. i. = 0,43429--- der Zahl (230.) oder der Subtangente des Briggischen Systems (224.)

Diese Erinnerung konnte ich in den Erläuter. der Anal. endl. Gr. nicht machen; daher ich den genannten Logarithmen das. S. 457. erst berechnete, welches nicht nöthig gewesen wäre, wenn ich das hier Erwähnte a. a. O. hätte voraussetzen können.

§. 233.

Zu I.

Weil $AP . PM = \frac{a^2}{8}$, so ist $PM = \frac{a^2}{8 . AP}$; nun sei $GCMP = Z$, so ist

$$dZ = PM . dAP$$

$$= \frac{a^2}{8 . AP} . dAP \text{ oder}$$

$$dZ = \frac{a^2}{8} . \frac{dAP}{AP}.$$

Nun ist $\frac{a^2}{8} . \frac{dAP}{AP}$ das Differential von AP für

L ein

ein logarithmisches System, dessen Subtangente $= \frac{a^2}{8}$ ist (216, 217. u. 219. IIII.); setzt man also $\frac{a^2}{8} = 1$, so daß

$$dZ = \frac{dAP}{AP}$$

so ist $\frac{dAP}{AP}$ das Differential des natürlichen Logarithmen von AP (225.), folglich

$$Z = \log nat\, AP \quad (♄$$

Der Ausdruck im Buche

$$Z = \frac{a^2}{8} . \log AP \quad (☿$$

wo log sich auch auf die natürlichen bezieht, widerspricht diesem nicht, wie sogleich aus III. erhellen wird.

Zu III.

Wenn nämlich CA den Asymptotenwinkel halbirt, so wird GAC = GCA = 45°, also beide Catheten AG, GC, einander gleich; dieß giebt

$$AG^2 + GC^2 = 2AG^2 = AC^2, \text{ also}$$

$$AG^2 = \frac{AC^2}{2} \text{ und}$$

$$AG = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

folglich

folglich für AG = 1,

$$a = 2\sqrt{2}$$

und solches quadrirt, giebt

$$a^2 = 4 \cdot 2 = 8 \quad \text{und}$$

$$\frac{a^2}{8} = 1$$

daß also in I. die Gleichung ☿ mit der ♄ einerlei ist. Zugleich erhellet aber auch, daß die Voraussetzung $\frac{a^2}{8} = 1$, auch AG = 1 giebt, wo nämlich AG die Absciſſe ist, deren zugehörige Ordinate in den Scheitel C reicht.

Zu IV.

Wenn nämlich $u < 1$ ist, weil für $u > 1$ die Reihe 220. divergirt; wäre also $u > 1$, so setze man AP = N (224.), und suche daraus $u = \frac{N - 1}{N + 1}$; dieß giebt (223.)

$$GCMP = \log AP = l\left(\frac{1 + \frac{N-1}{N+1}}{1 - \frac{N-1}{N+1}}\right) \quad \text{oder}$$

⊙)

$$Z = 2u \cdot (1 + \tfrac{1}{3} u^2 + \tfrac{1}{5} u^4 + \tfrac{1}{7} u^6 \ldots)$$

wo man statt u nur $\frac{AP - 1}{AP + 1}$ setzen darf.

Es ist also die Gleichung (☉) ein allgemeiner Ausdruck für die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. Könnte man demnach die natürliche Logarithmen genau angeben, so hätte man auch die erwähnte Quadratur, und umgekehrt, wüßte man letztere, so liessen sich auch die natürlichen Logarithmen genau angeben d. i. die natürlichen Logarithmen hängen mit der Quadratur der Hyperbel zusammen (no. V.)

Zu VI.

Man gedenke sich nämlich die Ordinate (Fig. 21.) MP bis in μ verlängert, so daß $P\mu$ mit AG multiplicirt den hyperbolischen Raum GCMP giebt, also $AG . P\mu = GCMP$, oder $z = P\mu = \frac{GCMP}{AG}$ oder $= \frac{Z}{AG}$ wird. Für $GP = 0$, wird auch Z $= 0$, folglich auch z; stellt man sich also eine Reihe Ordinaten vor, wie $P\mu$, $p\pi$ u. s. w. so, daß allemal

$$p\pi = \frac{GCmp}{AG}$$

oder $$z = \frac{Z}{AG}$$

so liegen die Endpunkte derselben in einer krummen Linie, die durch G hindurch geht. Für $An < AG$ wird nNCG verneint, also wird da die Ordinate $n\nu = z$ auch verneint werden d. i. oberhalb AE fallen,

len, da sie zuvor unterhalb fiele, weil $n\nu = \frac{nNGC}{AG}$ sein soll, wo der Zähler verneint ist. Für $An = 0$ fällt nN in AF, und wird also, so wie der Raum FAGCB unendlich (II.) also in dem Fall

$$z = \frac{-\infty}{AG} = -\infty \quad (Q$$

welches zugleich den bekannten Satz giebt, daß $\log 0 = -\infty$ nicht, wie in den Sinustafeln gewöhnlich steht, $= 0$. Ausserdem folgt aber auch aus Q, daß die Punkte π, μ, G, ν u. s. w. in einer krummen Linie $\pi G f$ liegen, für welche AF eine Asymptote ist. Diese krumme Linie heißt nun auch die **logarithmische** oder **logistische**, weil sich in ihr die Ordinaten z allemal verhalten, wie die Logarithmen der zugehörigen Abscissen; sie verhalten sich nämlich eigentlich wie die zugehörigen hyperbolischen Räume Z, die sich aber selbst wie die Logarithmen der zu z gehörigen Abscissen verhalten. So verhält sich z. B.

$n\nu$ wie $nNCG$
aber $nNCG$ wie log nat. An
also auch $n\nu$ wie log nat. An

oder z wie der natürliche Logarithme der zugehörigen Abscisse. Was also in der Hyperbel die zu den Abscissen gehörige Flächen Z sind, sind in der logistischen Linie die zu diesen Abscissen gehörige Ordinaten z, und wenn man also letztere anzugeben weiß, so folgt daraus die Quadratur der Hyperbel, daher

die logistische Linie auch die Quadratrix der Hyperbel heißt. Nimmt man die Abscissen der logistischen Linie auf AF, und die Ordinaten der AE gleichlaufend, so erhellet, daß die logistische Linie eine logarithmische ist, in der sich die Abscissen wie die Logarithmen der Ordinaten verhalten.

Zu VII.

Eigentlich finden sich bei Hrn. Lambert nur die natürliche Logarithmen der Zahlen von 1 — 100 Tab. XIII. und ausserdem von 1 — 10 durch alle Hunderttheile hindurch Tab. XV. in sieben Decimalstellen. Nun darf man aber die Zahlen 1,01; 1,02; 1,03; u. s. w. nur alle mit hundert multipliciren, um die Zahlen 101, 102, 103 u. s. w. zu erhalten; und also darf man nur bei Hrn. Lambert zu den Logarithmen Tab. XV. noch den log nat. 100 = 4,6051702 addiren, so hat man mit Zuziehung der Tab. XIII. die Logarithmen aller Zahlen von 1 — 1000. Nur muß ich erinnern, daß bei Hrn. Lambert die beiden Logarithmen, der von 47, und der von 59 in der letzten Decimalstelle um 1 zu klein sind.

§. 234.

s. oben Erl. zu 223.

Zum Beschluß dieser höchst wichtigen Lehre will ich hier noch folgendes anmerken: Die gewöhnlichen künstlichen Logarithmen, deren wir uns zur Abkürzung der Rechnungen zu bedienen pflegen, sind die, deren Basis 10 ist d. i. die Briggischen. Blos

zur

zur Abkürzung der Rechnung gebrauchen wir die natürlichen Logarithmen nicht, demohngeachtet ist ihr Gebrauch oft nothwendig, wenn sie selbst als absolute Grössen in Rechnungen vorkommen. Aus der Ursache wären vollständige Tafeln, welche die natürliche Logarithmen enthielten, sehr zu wünschen, worüber ich mich in der Vorrede näher erklärt habe.

Das dritte Hauptlogarithmensystem ist das Nepperſche, dessen Basis aber noch ungewis ist. Hr. Karsten II. Th. 146. §. nimmt dafür die Zahl 9999999 an, und zeigt, daß einige darnach berechnete Zahlen, die nämlich den Logarithmen 2, 3, 4, 5, 6 zugehören, mit den Nepperschen einerlei sind. Wenn man indessen bedenkt, daß Nepper seine Logarithmen selbst nur neben solche Zahlen gesetzt hat, die denen gehörigen nur überaus nahe kommen, und wenn man noch überdas überlegt, daß man ohnehin schon für eine Basis, die der Nepperschen nur sehr nahe käme, gewiß solche Logarithmen berechnen würde, die auch den Nepperschen überaus nahe kommen müßten, so wird man schon übersehen, daß man aus der Uebereinstimmung der von Hrn. K. berechneten Zahlen mit den Nepperschen, nicht sogleich den Schluß ziehen könne, Nepper müsse in der That 9999999 zur Basis seiner Logarithmen angenommen haben, obgleich die Neppersche Basis freilich nur um ein sehr kleines Theilchen der Einheit von der genannten verschieden sein kann. Der Hr. Aut. trägt die Untersuchung über die Neppersche Logarith-

men in seinen astron. Abh. II. Samml. S. 64. u. folgg. vor, und findet S. 68. die Basis derselben =

$$9999999,00000005$$

und wenn die Nepperschen Zahlen nicht durchaus auf diese Basis passen, so ist diese nur eine Folge von dem, was schon bekannt ist, daß die Nepperschen Logarithmen in den letzten Zahlen nicht scharf genug berechnet sind. Also macht uns dieser Umstand schon die Gleichung

$$\log \text{nat} \frac{y}{m} = -\frac{1}{m} \log \text{Nep.}\ y \quad (\odot$$

(a. a. O.) wo m = 10000000, zur Berechnung der natürlichen Logarithmen aus den Nepperschen unbrauchbar. Aber diesen Umstand bei Seite gesetzt, erhellet aus der Gleichung ⊙ so viel, daß die natürliche Logarithmen von den Nepperschen in den Ziffern selbst nicht verschieden sind, sondern nur in der Bezeichnung der Decimalstellen und dem vorstehenden + oder —, daher auch viele die Nepperschen Logarithmen natürliche nennen, wie selbst Hr. Karsten thut mathes. theor. elem. atque sublim. pag. 668. wo er sich so ausdruckt: Nepperianum vero (sc. systema) est naturale, obgleich aus dem Gesagten klar ist, daß sich dieses nicht so schlechtweg sagen läßt.

Man wird mich entschuldigen, daß ich an einem so schicklichen Orte noch verschiedenes erwähnt habe, das billig jeder wissen muß, und das wenigstens Anfänger reitzen wird, mehreres davon in an-

dern Schriften nachzulesen. Dahin gehören vornehmlich des Hrn. Aut. astron. Abh. II. Samml. besonders S. 64 - 73. und Hrn. Scheibels Einl. zur mathem. Bücherkenntnis VIItes St. wo auch noch andere Schriften erwähnt werden.

Auf die hyperbolische Logarithmen hat man nachher die Erfindung der parabolischen gegründet; sie ist sinnreich, aber ohne Nutzen, daher man auch selten Nachricht von ihr findet. s. Jo. Gottofr. Brendelii opusc. mathem. & medici argum. P. I. in der Ausgabe, die Hr. Prof. Wrisberg zu Göttingen 1769. besorgt hat, wo man zwo schöne Abhandlungen (pag. 32 - 45.) de logarithmis parabolicis antrift.

N.	Logarithm. hyperbol.	N.	Logarithm. hyperbol.
1	0,00000 00000 000	16	2,77258 87222 397
2	0,69314 71805 599	17	2,83321 33440 562
3	1,09861 22886 681	18	2,89037 17578 961
4	1,38629 43611 198	19	2,94443 89791 664
5	1,60943 79124 341	20	2,99573 22735 539
6	1,79175 94692 280	21	3,04452 24377 234
7	1,94591 01490 553	22	3,09104 24533 583
8	2,07944 15416 798	23	3,13549 42159 291
9	2,19722 45773 362	24	3,17805 38303 479
10	2,30258 50929 940	25	3,21887 58248 682
11	2,39789 52727 983	26	3,25809 65380 214
12	2,48490 66497 880	27	3,29583 68660 043
13	2,56494 93574 615	28	3,33220 45101 752
14	2,63905 73296 152	29	3,36729 58299 864
15	2,70805 02011 022	30	3,40119 73816 621

N.	Logarithm. hyperbol.
31	3,43398 72044 851
32	3,46573 59027 997
33	3,49650 75614 664
34	3,52636 05246 161
35	3,55534 80614 894
36	3,58351 89384 561
37	3,61091 79126 442
38	3,63758 61597 263
39	3,66356 16461 296
40	3,68887 94541 139
41	3,71357 20667 043
42	3,73766 96182 833
43	3,76120 01156 935
44	3,78418 96339 182
45	3,80666 24897 703
46	3,82864 13964 890
47	3,85014 76017 101
48	3,87120 10109 078
49	3,89182 02981 106
50	3,91202 30054 281
51	3,93182 56327 243
52	3,95124 37185 814
53	3,97029 19025 421
54	3,98898 40465 642
55	4,00733 31853 324
56	4,02535 16917 351
57	4,04305 12678 345
58	4,06044 30105 464
59	4,07753 74439 057
60	4,09434 45622 221
61	4,11087 38641 733
62	4,12713 43850 450
63	4,14313 47263 915
64	4,15888 30833 596
65	4,17438 72698 956
66	4,18965 47420 264
67	4,20469 26193 909
68	4,21950 77051 761
69	4,23410 65945 972
70	4,24849 52420 493
71	4,26267 98770 413
72	4,27666 61190 160
73	4,29045 94411 484
74	4,30406 50932 042
75	4,31748 81135 363
76	4,33073 33402 863
77	4,34380 54218 536
78	4,35670 88266 896
79	4,36944 78524 670
80	4,38202 66346 738
81	4,39444 91546 724
82	4,40671 92472 642
83	4,41884 06078 025
84	4,43081 67988 433
85	4,44265 12564 903
86	4,45434 72962 535
87	4,46590 81186 545
88	4,47733 68144 781
89	4,48863 63697 321
90	4,49980 96699 302
91	4,51085 95065 168
92	4,52178 85770 490
93	4,53259 94931 532
94	4,54329 47822 701
95	4,55387 68916 005
96	4,56434 81914 678
97	4,57471 09785 033
98	4,58496 74786 705
99	4,59511 98501 345
100	4,60517 01859 880

N.	Logarithm. hyperbol.	N.	Logarithm hyperbol.
101	4,61512 05168 412	136	4,91265 48857 360
102	4,62497 28132 842	137	4,91998 09258 281
103	4,63472 89882 295	138	4,92725 36851 571
104	4,64439 08991 413	139	4,93447 39331 306
105	4,65396 03501 575	140	4,94164 24226 093
106	4,66343 90831 020	141	4,94875 98904 782
107	4,67282 88344 619	142	4,95582 70576 012
108	4,68213 12271 242	143	4,96284 46302 599
109	4,69134 78822 291	144	4,96981 32996 759
110	4,70048 03657 924	145	4,97673 37424 205
111	4,70953 02013 123	146	4,98360 66217 084
112	4,71849 88712 950	147	4,99043 25867 787
113	4,72738 78264 013	148	4,99721 22737 641
114	4,73619 84483 944	149	5,00394 63059 454
115	4,74493 21283 632	150	5,01063 52940 962
116	4,75359 01911 063	151	5,01727 98368 149
117	4,76217 39347 977	152	5,02388 05208 462
118	4,77068 46244 656	153	5,03043 79213 924
119	4,77912 34931 115	154	5,03695 26024 136
120	4,78749 17427 820	155	5,04342 51169 192
121	4,79579 05455 967	156	5,04985 60072 495
122	4,80402 10447 332	157	5,05624 58053 483
123	4,81218 43553 724	158	5,06259 50329 269
124	4,82028 15656 050	159	5,06890 41912 102
125	4,82831 37373 023	160	5,07517 38152 338
126	4,83628 19069 514	161	5,08140 43649 844
127	4,84418 70864 586	162	5,08759 63352 323
128	4,85203 02639 196	163	5,09375 02008 067
129	4,85981 24043 616	164	5,09986 64278 241
130	4,86753 44504 555	165	5,10594 54739 005
131	4,87519 73232 011	166	5,11198 77883 624
132	4,88280 19225 863	167	5,11799 38124 167
133	4,89034 91282 217	168	5,12396 39794 032
134	4,89783 97999 509	169	5,12989 87149 231
135	4,90527 47784 384	170	5,13579 84370 502

N.	Logarithm. hyperbol.			N.	Logarithm. hyperbol.		
171	5,14166	35565	026	206	5,32787	61687	895
172	5,14749	44768	134	207	5,33271	87932	653
173	5,15329	15944	977	208	5,33753	80797	013
174	5,15905	52992	145	209	5,34233	42519	648
175	5,16478	59739	235	210	5,34710	75307	174
176	5,17048	39950	381	211	5,35185	81334	760
177	5,17614	97325	738	212	5,35658	62636	620
178	5,18178	35502	921	213	5,36129	21657	094
179	5,18738	58058	407	214	5,36597	60150	218
180	5,19295	68508	902	215	5,37063	80281	276
181	5,19849	70312	658	216	5,37527	84076	841
182	5,20400	66870	768	217	5,37989	73535	404
183	5,20948	61528	414	218	5,38449	50627	890
184	5,21493	57576	089	219	5,38907	17298	165
185	5,22035	58250	783	220	5,39362	75463	523
186	5,22574	66737	132	221	5,39816	27015	177
187	5,23110	86168	545	222	5,40267	73818	723
188	5,23644	19628	300	223	5,40717	17714	601
189	5,24174	70150	596	224	5,41164	60518	550
190	5,24702	40721	604	225	5,41610	04022	044
191	5,25227	34290	466	226	5,42053	50069	613
192	5,25749	53720	277	227	5,42495	00174	814
193	5,26269	01899	048	228	5,42934	56289	544
194	5,26785	81590	633	229	5,43372	20035	542
195	5,27299	95585	637	230	5,43807	93089	231
196	5,27811	46592	305	231	5,44241	77105	217
197	5,28320	37287	380	232	5,44673	73716	663
198	5,28826	70306	945	233	5,45103	84536	656
199	5,29330	48247	245	234	5,45532	11153	577
200	5,29831	73665	480	235	5,45958	55141	442
201	5,30330	49080	590	236	5,46383	18050	256
202	5,30826	76974	011	237	5,46806	01410	351
203	5,31320	59790	417	238	5,47227	06736	714
204	5,31811	99938	442	239	5,47646	35518	314
205	5,32300	99791	384	240	5,48063	89233	419

N.	Logarithm. hyperbol.
241	5,48479 69333 906
242	5,48893 77261 566
243	5,49306 14433 405
244	5,49716 82252 932
245	5,50125 82105 447
246	5,50533 15359 323
247	5,50938 83366 279
248	5,51342 87461 649
249	5,51745 28964 706
250	5,56068 16310 155
251	5,52545 29391 377
252	5,52942 90875 114
253	5,53338 94887 275
254	5,53733 42670 185
255	5,54126 35451 584
256	5,54517 74444 795
257	5,54907 60847 952
258	5,55295 95849 216
259	5,55682 80616 995
260	5,56068 16310 155
261	5,56452 04073 226
262	5,56834 45037 611
263	5,57215 40321 777
264	5,57594 91031 463
265	5,57972 98149 762
266	5,59098 70556 117
267	5,58724 86584 002
268	5,59198 69805 108
269	5,59471 13796 018
270	5,59942 19589 983
271	5,60211 88208 797
272	5,60580 20662 959
273	5,60947 17951 849
274	5,61312 81063 880
275	5,61677 10977 665

N.	Logarithm. hyperbol.
276	5,62040 08657 171
277	5,62401 75062 873
278	5,62762 11136 906
279	5,63121 17818 213
280	5,63478 96031 692
281	5,63835 46693 337
282	5,64190 70709 382
283	5,64544 68976 432
284	5,64897 42381 612
285	5,65248 91802 686
286	5,65599 18108 198
287	5,65948 22157 596
288	5,66296 04801 359
289	5,66642 66881 124
290	5,66988 09229 805
291	5,67332 32671 714
292	5,67675 38022 683
293	5,68017 26090 170
294	5,68357 97673 386
295	5,68697 53563 398
296	5,69035 94543 240
297	5,69373 21388 026
298	5,69709 34865 054
299	5,70044 35733 906
300	5,70378 24746 562
301	5,70711 02647 488
302	5,71042 70173 748
303	5,71373 28055 093
304	5,71702 77014 062
305	5,72031 17766 074
306	5,72358 51019 523
307	5,72684 77475 871
308	5,73009 97829 735
309	5,73334 12768 976
310	5,73657 22974 791

N.	Logarithm. hyperbol.	N.	Logarithm. hyperbol.
311	5,73979 29121 791	365	5,89989 73535 825
312	5,74300 31878 094	367	5,90536 18480 546
313	5,74620 31905 401	371	5,91620 20515 974
314	5,74939 29859 082	373	5,92157 84086 338
315	5,75257 26388 256	377	5,93224 51874 480
316	5,75574 22134 868	381	5,94279 93751 267
317	5,75890 17738 772	383	5,94803 49891 806
318	5,76205 13717 701	387	5,95842 46930 297
319	5,76519 11027 848	395	5,97888 57649 011
320	5,76832 09957 937	397	5,98393 62806 871
321	5,77144 11231 300	399	5,98896 14168 898
322	5,77455 15455 444	400	5,99146 45471 079
323	5,77765 23232 226	401	5,99396 14273 065
324	5,78074 35157 923	407	6,00881 31854 426
325	5,78382 51823 297	409	6,01371 51560 428
326	5,78689 73813 666	417	6,03308 62217 987
327	5,78996 01708 972	419	6,03787 09199 221
328	5,79301 36083 841	421	6,04263 28336 823
329	5,79605 77507 654	429	6,06145 69189 280
330	5,79909 26544 605	431	6,06610 80901 037
331	5,80211 83754 771	433	6,07073 77280 024
335	5,81413 05318 350	439	6,08449 94130 751
336	5,82008 29303 623	443	6,09356 97700 451
345	5,84354 44170 313	449	6,10702 28877 422
347	5,84932 47799 468	457	6,12468 33908 942
349	5,85507 19222 024	461	6,13339 80429 966
351	5,86078 62234 658	463	6,13772 70540 862
353	5,86646 80569 333	467	6,14632 92576 688
357	5,87773 57817 796	479	6,17170 05864 009
359	5,88332 23884 872	487	6,18826 41230 825

N.	Logarithm. hyperbol.
491	6,19644 41277 945
499	6,21260 60957 515

Von

Von der Exponentialrechnung.

§. 236.

s. die Erl. zu §. 15.

§. 237.

Druckt man am Ende dieses §. die Reihe durch x aus, so wird

$$y = x - 1$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \tfrac{1}{3}$$
$$\tfrac{1}{8}y^4 = \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{6}{8}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8}$$
$$\tfrac{1}{15}y^5 = \tfrac{1}{15}x^5 - \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{15}$$

u. s. w.

Diese Glieder geben soweit berechnet zusammen addirt $\int x^x dx =$

$$\tfrac{1}{15}x^5 - \tfrac{5}{24}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{5}{16}x^2 + \tfrac{5}{6}x + \text{Const}$$

wo man in jedem vorkommenden Fall leicht beurtheilen kann, ob man mit denen nur berechneten Gliedern zufrieden sein kann; und wären solche noch nicht hinreichend, so sieht man leicht, daß auch alle die Cöefficienten der Potenzen von x bei genauerer Rechnung verändert würden. Daß der Reihe im Buche, welche y enthält, keine Const. addirt zu werden braucht, erhellet wie in 220; aber die Reihe durch x ausgedruckt hat allemal eine Const, welche die Summe der mit — und + abwechselnden Cöefficienten

cienten von den Gliedern der Reihe für $\int(1+y)^{\frac{1}{y}}$ dy ist. So wäre hier Const =

$$-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{72}.$$

§. 240.

Dieser Satz liesse sich auch so darthun; es sei

$$s=1+\frac{y\,la}{1}+\frac{y^2(la)^2}{1.2}+\frac{y^3(la)^3}{1.2.3}\text{------}$$

so erhält man durchs Differentiiren

$$\frac{ds}{dy}=la+\frac{y.(la)^2}{1}+\frac{y^2(la)^3}{1.2}+\frac{y^3(la)^4}{1.2.3}\text{----}$$

und $\dfrac{ds}{dy.la}=1+\dfrac{y.la}{1}+\dfrac{y^2(la)^2}{1.2}+\dfrac{y^3(la)^3}{1.2.3}\text{----}$

folglich $\dfrac{ds}{dy.la}=s$, und $\dfrac{ds}{s}=dy.la$; dieß integrirt giebt $ls=yla$, mithin $s=a^y$; so beweißt Hr. Kies diesen Satz a. a. O. Dergleichen Beweise aber, wo man so synthetisch verfährt, taugen für Anfänger nicht. Hätte Hr. Kies den Satz, daß

$$a^y=1+\frac{yla}{1}+\frac{y^2(la)^2}{1.2}+\frac{y^3(la)^3}{1.2.3}\text{----}$$

nicht schon gewußt, so würde Er gewiß nicht darauf gefallen sein, anzunehmen, es solle

$$s=1+\frac{yla}{1}+\frac{y^2(la)^2}{1.2}+\frac{y^3(la)^3}{1.2.3}\text{----}$$

sein;

sein; diese Reihe muß Er schon anderswo haben kennen lernen; und der Vorzug der Analysis ist eben der, daß man von selbst auf dergleichen unbekannte Sätze geführt wird.

§. 242.

Aus 241. ist

$$d(e^{mx}) = me^{mx}dx,$$

folglich $e^{mx}dx = \frac{d(e^{mx})}{m}$

Dieß hier gebraucht, giebt

$$x^{\varepsilon}e^{mx}dx = \frac{x^{\varepsilon}d(e^{mx})}{m} \quad N)$$

Nun ist

$$\frac{x^{\varepsilon}}{m}d(e^{mx}) + e^{mx}d\frac{x^{\varepsilon}}{m} = d\left(\frac{x^{\varepsilon}}{m}.e^{mx}\right),$$

also

$$\int\left(\frac{x^{\varepsilon}}{m}de^{mx}\right) = \frac{x^{\varepsilon}e^{mx}}{m} - \int\left(e^{mx}d\frac{x^{\varepsilon}}{m}\right)$$

oder aus (N)

$$\int(x^{\varepsilon}e^{mx}dx) = \frac{x^{\varepsilon}e^{mx}}{m} - \int\left(\frac{e^{mx}dx^{\varepsilon}}{m}\right),$$

oder wenn man $\int\left(\frac{e^{mx}dx^{\varepsilon}}{m}\right) = \int\left(\frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}e^{mx}dx}{m}\right)$

$= p$ setzt, so wird

$$\int e^{mx} x^{\varepsilon} dx = \frac{x^{\varepsilon} e^{mx}}{m} - p \quad P.)$$

Um also $e^{mx} x^{\varepsilon} dx$ zu integriren, muß man p oder das Integral von $\frac{\varepsilon x^{\varepsilon - 1} e^{mx} dx}{m}$ suchen, und zu dem Ende wieder völlig wie vorhin verfahren. Es ist nämlich (241.)

$$e^{mx} dx = \frac{d(e^{mx})}{m}$$

also $dp = \frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1} . e^{mx} dx = \frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1} . \frac{d(e^{mx})}{m}$; nun geben die ersten Regeln der Differentialrechnung

$$\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1} . \frac{d(e^{mx})}{m} + \frac{e^{mx}}{m} . d\left(\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1}\right)$$

$$= d\left(\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1} . \frac{e^{mx}}{m}\right),$$

folglich $dp =$

$$\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1} . \frac{d(e^{mx})}{m} = d\left(\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1} . \frac{e^{mx}}{m}\right)$$

$$- \frac{e^{mx}}{m} . d\left(\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1}\right)$$

und daher

$$p = \frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1} . \frac{e^{mx}}{m} - \int\left(\frac{e^{mx}}{m} d\left(\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon - 1}\right)\right)$$

=

$$= \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1} e^{mx}}{m^2} - \int\left(\frac{e^{mx}}{m} d\left(\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon-1}\right)\right)$$

Dieß nun in (P) gesetzt, giebt, wenn man

$\int\left(\frac{e^{mx}}{m} d\left(\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon-1}\right)\right) = q$ setzt,

$$\int e^{mx} x^{\varepsilon} dx = \frac{x^{\varepsilon} e^{mx}}{m} - \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1} e^{mx}}{m^2} + q \quad Q.)$$

wo nun wieder q, wie vorhin p gesucht werden muß. Der Werth von q giebt nämlich

$$dq = \frac{e^{mx}}{m} d\left(\frac{\varepsilon}{m} x^{\varepsilon-1}\right)$$

$$= \frac{e^{mx}}{m} \cdot \frac{\varepsilon}{m} \cdot (\varepsilon - 1) . x^{\varepsilon-2} dx$$

$$= \frac{\varepsilon . (\varepsilon - 1) . x^{\varepsilon-2}}{m^2} . e^{mx} dx$$

$$= \frac{\varepsilon . (\varepsilon - 1) . x^{\varepsilon-2}}{m^2} . \frac{d(e^{mx})}{m} \quad (241.)$$

$$= \frac{\varepsilon . (\varepsilon - 1) . x^{\varepsilon-2}}{m^3} d(e^{mx}).$$

Nun ist $\frac{\varepsilon . (\varepsilon - 1 . x^{\varepsilon-2}}{m^3} de^{mx} + \frac{e^{mx} . d\varepsilon . (\varepsilon - 1) . x^{\varepsilon-2}}{m^3}$

$= \frac{d(\varepsilon . (\varepsilon - 1) . x^{\varepsilon-2} . e^{mx})}{m^3}$, also $dq =$

$$d\left(\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}.e^{mx}}{m^3}\right)-e^{mx}d\left(\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}}{m^3}\right)$$

und $q =$

$$\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}.e^{mx}}{m^3}-\int\frac{e^{mx}.d(\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2})}{m^3}$$

Dieß in (Q) gesetzt, giebt $\int e^{mx}x^{\varepsilon}dx =$

$$\frac{x^{\varepsilon}e^{mx}}{m}-\frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}e^{mx}}{m^2}+\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}.e^{mx}}{m^3}-r\ R.)$$

wenn man $\int\frac{e^{mx}d\,\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}}{m^3}=r$ setzt.

Nimmt man nun wieder den Werth von dr, und integrirt diesen gefundenen Werth, so erhält man wie vorhin zwei Glieder für r, die, aus dem bisherigen Fortgang zu urtheilen, so aussehen werden:

$$r=\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).(\varepsilon-2).x^{\varepsilon-3}e^{mx}}{m^4}-s$$

so daß $s=\int\frac{e^{mx}.d\,\varepsilon.(\varepsilon-1).(\varepsilon-2).x^{\varepsilon-3}}{m^4}$, und

so wird man vermuthen, daß sich s, t u. s. w. alle folgende Glieder auf eben die Art ohne sie erst zu berechnen grad hinschreiben lassen. Der im Buche befindliche allgemeine Beweis rechtfertigt diese Vermuthung, und zeigt, daß das Integral von $x^{\varepsilon}e^{mx}dx$ durch eine Reihe ausgedruckt werde, in der die Glieder nach dem allgemeinen Gesetz auf einander folgen, das bei den nur berechneten in die Augen fällt. Nur

muß

muß man merken, daß wenn p, q u. s. w. erste und zwote u. s. w. Ergänzung heissen, nicht mehr als ε Ergänzungen statt finden, weil die $\varepsilon + 1$te und alle folgende Ergänzungen den Factor $\varepsilon - \varepsilon = 0$ enthalten, und also verschwinden. Also ist $\int e^{mx} x^{\varepsilon} dx$

$$= e^{mx} \cdot \left(\frac{x^{\varepsilon}}{m} - \frac{\varepsilon x^{\varepsilon - 1}}{m^2} + \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - 1) \cdot x^{\varepsilon - 2}}{m^3} \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - 1) \cdot (\varepsilon - 2) \cdot x^{\varepsilon - 3}}{m^4} \cdots \pm \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - 1) \cdots 1}{m^{\varepsilon + 1}} \right) + \text{Const}$$

Es erhellet nämlich aus P, Q und R, daß die Glieder mit + und — abwechseln müssen, wornach die Reihe im Buche corrigirt werden muß; das letzte Glied dieser Reihe $\frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - 1) \cdots 1}{m^{\varepsilon + 1}}$ gehört zur εten Ergänzung; nun hat die erste, dritte u. s. w. überhaupt jede ungrade Ergänzung das Zeichen —, so wie jede grade das Zeichen + vor sich; demnach erhält das letzte Glied das Zeichen + oder —, nachdem ε grad oder ungrad ist, deswegen ich hier das zweideutige $\pm$ gesetzt habe. Uebrigens hat man bei Bestimmung der Constante nur zu bedenken, daß diese Integralgleichung eine unbestimmte ist, wo also Const mehr als eine Bestimmung leidet. s. die Erl. zu 201 - 204. das. III. Er. wo man das gegenwärtige weiter erörtert findet, wie auch die Erl. zu 210. am E. woraus man verstehen wird, was die Worte im Buche sagen wollen **wozu keine** - - - - - - soll.

§. 243.

Es ist I) $x^\varepsilon (lx)^n dx = \frac{(lx)^n (\varepsilon + 1) e^\varepsilon dx}{\varepsilon + 1} =$

$\frac{(lx)^n dx^{\varepsilon+1}}{\varepsilon + 1} = \frac{d(lx)^n . x^{\varepsilon+1} - x^{\varepsilon+1} d(lx)^n}{\varepsilon + 1}$, also

$$\int x^\varepsilon (lx)^n dx = \frac{(lx)^n x^{\varepsilon+1}}{\varepsilon + 1} - \int \frac{x^{\varepsilon+1} d(lx)^n}{\varepsilon + 1} \quad A.)$$

II) $\frac{x^{\varepsilon+1} d(lx)^n}{\varepsilon + 1} = \frac{x^{\varepsilon+1} . n . (lx)^{n-1} dx}{x . (\varepsilon + 1)} =$

$\frac{x^\varepsilon . n . (lx)^{n-1} dx}{\varepsilon + 1} = \frac{n}{\varepsilon + 1} . \frac{(lx)^{n-1} . (\varepsilon + 1) . x^\varepsilon dx}{\varepsilon + 1} =$

$\frac{n}{\varepsilon + 1} \frac{(lx)^{n-1} . dx^{\varepsilon+1}}{\varepsilon + 1} = \frac{n}{(\varepsilon + 1)^2} . \left(dx^{\varepsilon+1} (lx)^{n-1} - x^{\varepsilon+1} d(lx)^{n-1}\right)$

mithin $\int \frac{x^{\varepsilon+1} d(lx)^n}{\varepsilon + 1} =$

$\frac{nx^{\varepsilon+1} . (lx)^{n-1}}{(\varepsilon + 1)^2} - \frac{n}{(\varepsilon + 1)^2} . \int x^{\varepsilon+1} d(lx)^{n-1}$

Dieß in A gesetzt, giebt

$$\int x^\varepsilon (lx)^n . dx = \frac{(lx)^n x^{\varepsilon+1}}{\varepsilon + 1} - \frac{nx^{\varepsilon+1} . (lx)^{n-1}}{(\varepsilon + 1)^2} + \frac{n}{(\varepsilon + 1)^2} \int x^{\varepsilon+1} d(lx)^{n-1} \quad B.)$$

III.

III) $\frac{n}{(\varepsilon+1)^2} \cdot x^{\varepsilon+1} d(lx)^{n-1} =$

$\frac{n}{(\varepsilon+1)^2} \cdot \frac{x^{\varepsilon+1} \cdot (n-1)(lx)^{n-2} dx}{x} =$

$\frac{n}{(\varepsilon+1)^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot (lx)^{n-2} \cdot (\varepsilon+1) \cdot x^{\varepsilon} \cdot dx}{\varepsilon+1} =$

$\frac{n}{(\varepsilon+1)^2} \times \frac{(n-1) \cdot (lx)^{n-2} \cdot dx^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1} =$

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (d(lx)^{n-2} x^{\varepsilon+1} - x^{\varepsilon+1} \cdot d(lx)^{n-2})}{(\varepsilon+1)^3}$

Folglich $\frac{n}{(\varepsilon+1)^2} \cdot \int x^{\varepsilon+1} \cdot d(lx)^{n-1} =$

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (lx)^{n-2} \cdot x^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)^3} - \frac{n \cdot (n-1) \cdot \int x^{\varepsilon+1} \cdot d(lx)^{n-2}}{(\varepsilon+1)^3}$;

dieß in B gesetzt, giebt $\int x^{\varepsilon} (lx)^n dx = \frac{(lx)^n \cdot x^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1} -$

$\frac{n}{(\varepsilon+1)^2} x^{\varepsilon+1} (lx)^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (lx)^{n-2} x^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)^3} -$

$\frac{n \cdot (n-1)}{(\varepsilon+1)^3} \int x^{\varepsilon+1} d(lx)^{n-2}$ C.)

wo das letzte Glied wieder =

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{(\varepsilon+1)^4} (lx)^{n-3} x^{\varepsilon+1} -$

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{(\varepsilon+1)^4} \int x^{\varepsilon+1} d(lx)^{n-3}$

 u. s. f.

u. s. f. da sich dann das allgemeine Gesetz, nachdem die Glieder fortgehen, völlig wie 242. beweisen läßt, wie auch im Buche geschehen ist. Nun enthält die erste Ergänzung n, die zwote n — 1, die dritte n — 2 ------ die n + 1te und folgende Ergänzung n — n = 0 als einen Factor, also giebt es nicht mehr als n solche Ergänzungen, und da die nte im Nenner $(\varepsilon + 1)^{n+1}$ haben muß, so giebt sich das vollständige gesuchte Integral, wie es im Buche steht, wo man nur wieder bemerken muß, daß die Glieder mit + und — abwechseln müssen, wie hier aus C und dem Fortgang der Reihe erhellet, daß also das letzte Glied auch hier + oder — vor sich hat, nachdem n grad oder ungrad ist. Dieß Integral scheint nun für x = 0 zu verschwinden und also die Integralgleichung eine bestimmte zu sein, welches aber in der That nicht ist; sie sieht nämlich für diesen Fall so aus:

$$\int x^{\varepsilon} (lx)^n dx = 0 \times \left(\frac{(-\infty)^n}{\varepsilon + 1} - \frac{n(-\infty)^{n-1}}{(\varepsilon + 1)^2} + \frac{n.(n-1).(-\infty)^{n-2}}{(\varepsilon + 1)^3} ----- \right) + \text{Const}$$

Nun weiß man, daß ein Produkt aus 0 in ∞ oft etwas geben kann; aber dieses **etwas** läßt sich hier nicht bestimmen, ob es gleich bei manchen Fällen sich thun läßt (s. oben 12. am E.), also weiß man hier nicht, was man für x = 0 der genannten Reihe für einen Werth geben soll; aus eben der Ursache sieht man auch nicht, worin sich für x = 0 die Grösse $x^{\varepsilon}(lx)^n dx$ verwandelt, und es läßt sich daher

her dadurch, daß man hier x = o setzt, die Constante nicht bestimmen. Ueberhaupt ist die Integralgleichung wieder eine unbestimmte, da man allgemein keinen Werth von x weiß, für den zugleich der vollkommene Werth des gesuchten Integrals zum voraus bekannt wäre. Nur so viel sieht man, daß man hier nicht wie in 210. für x = o auch das Integral = o setzen könne. §. 210. am E. Man kann deswegen annehmen, der Werth des vollkommenen Integrals solle für x = 1, m sein, so ergiebt sich daraus eine Bestimmung für Const. Man wählt diese Bestimmung hier aus der Ursache so, weil dadurch wegen l x = o alle Glieder der obigen Reihe bis auf das letzte wegfallen, und der Ausdruck für Const dadurch also am geschmeidigsten wird. Es wird nämlich

$$m = \frac{\pm n \, . \, (n - 1) \text{----} 1}{(\varepsilon + 1)^{n+1}} + \text{Const}$$

also

$$\text{Const} = m \mp \frac{n \, . \, (n - 1) \text{-----} 1}{(\varepsilon + 1)^{n+1}}$$

wo allemal das obere Zeichen einem graden das untere einem ungraden n zugehört. s. die Druckf. zur Integr.

Als eine Anwendung dieser Sätze will ich noch folgendes beibringen, das mir Herr Hofr. Kästner selbsten mitzutheilen die Gewogenheit gehabt hat.

Wenn AB die Höhe einer Luftsäule bis ans Ende der Atmosphäre ist, ihren Schwerpunkt C zu finden.

1. Es sei der Barometerstand bei A = f, bei P = y, AP = x, Pp = dx, die Dichte der Luft in A = m, also aus des Hrn. Aut. Abh. vom Höhenmessen 20. §.

$$\frac{mydx}{f} = -dy$$

2. Die Masse Luft in Pp also = $\frac{mydx}{f}$, ihr Moment an AP als einem Hebelarm = $x.\frac{my.dx}{f}$ = ydx log. nat. (f: y) (angef. Abh. 22.) = $-\frac{f}{m}$. dy . log. nat. (f : y) (Abh. 20.) = $\frac{f.dy}{m}$ log nat $\frac{y}{f}$.

3. Die Summe dieser Momente ist = AC. (f—y).

4. Nun sei

im Buche (243)	x	e	n	für dy.log nat y. Also
hier	y	o	1	∫ dy log nat y = y (log nat y — 1) + Const.

5. Nun ist das Differential in (2.) $= dy . \log nat\, y - dy . \log f$. Also das Integral $= y . \log nat\, y - y - y . \log nat\, f + Const.$

6. Es muß für $y = f$ verschwinden, also $o = f . o - f + Const.$ oder $Const = f$.

7. Folglich das Integral $= f - y - y . \log nat\, (f : y)$.

8. Die Summe der Momente (3.)

$$AC . (f - y) = \frac{f}{m} . (f - y - y . \log nat\, (f : y))$$

Also

$$9.\ AC = \frac{f}{(f - y) . m} . (f - y - y . \log nat\, (f : y))$$

10. Hier kann man nicht $y = o$ setzen, sonst wäre $AC = \infty$. Man s. die angef. Abh. 347.

11. Es sei $f = 336$ Linien $= 28$ Zoll, $y = 1$ Linie. Man setze $m = \frac{1}{10891}$ (angef. Abh. 65), so wäre

$$AC = \frac{336}{335} . (335 - \log nat\, 336) . 10891;$$

Nun ist

log nat 336 = 5,8171111
abgezogen von 335,
bleibt 329,1828888

log

log brigg 329, 183	=	2,5174373
log br 10891	=	4,0370581
log br 336	=	2,5263393
addirt giebt		9,0808347
abgezogen log br 335	=	2,5250448
bleibt log br. AC in Linien	=	6,5557899
davon abgezogen log br 144	=	2,1583625
bleibt log br AC in Fussen	=	4,3974274

also AC = 24970, 5 Fuß.

12. Weil $x = \frac{f}{144 \cdot m}$ log nat (f : y) in Fussen, so ist für y = 1 in Briggischen Logarithmen

$$\log \frac{1}{m} = 4,0370581$$

$$\log f = 2,5263393$$

$$\log \frac{f}{m} = 6,5633974$$

$$\log 144 = 2,1583625$$

$$\log 5,8171 = \begin{matrix} 4,4050349 \\ 0,7643330 \end{matrix}$$

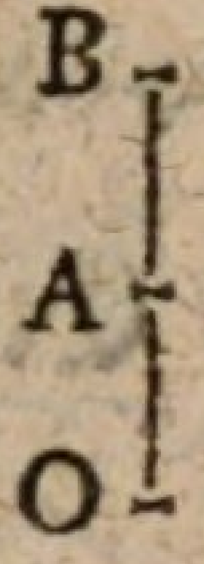
$$\log x = 5,1693679$$

giebt x = 147695 Fuß für die Höhe der Atmosphäre bis wo y = 1.

13. Der Halbmesser der Erde ist noch nicht 20 000 000 Fuß (Geograph. 20.) Also ist x in ihm noch nicht 200 mal enthalten.

14. Es

14. Es sei O der Mittelpunkt der Erde, AO = 1 ihr Halbmesser, AB = $\frac{1}{200}$, so verhalten sich die Schwere in A und B wie



$$OB^2 : OA^2 = 201^2 : 200^2$$

Nun ist

$$\log 201 = 2,3031961$$
$$\log 200 = 2,3010300$$

$$\log \frac{201}{200} = 0,0021661$$

$$2 \log \frac{201}{200} = 0,0043322$$

folglich $\left(\frac{201}{200}\right)^2 = 1,010$

also Schwere in A : Schwere in B

$$= 101 : 100$$

man kann demnach doch noch durch diese Höhe die Schwere als beinahe unveränderlich annehmen.

Einige

Einige allgemeine Formeln, zusammengesetzte Differentiale zu integriren.

§. 245.

Zweideutigkeit zu vermeiden, erinnere ich, daß die gegebene Formel eigentlich so ausgedruckt seyn sollte $c.(a+X)^p dX$.

§. 246.

Es ist nämlich $d(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2-x^2) = \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x).dx = \frac{-xdx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Nun setze man $X = \sqrt{(a^2-x^2)}$, $c = 1$, und $p = 2$, so verwandelt sich das dortige Integral $\frac{c.(a+X)^{p+1}}{p+1}$ in das gegenwärtige $\frac{(a+\sqrt{(a^2-x^2)})^3}{3}$.

§. 248.

Zu II.

In das gegebene Differential $x^m.(a+bx^n)^p.dx$, $\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ statt x gesetzt, giebt

(z—

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(a+b\cdot\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{n}{n}}\right)^{p} \cdot \frac{\frac{1}{n}\cdot(z-a)^{\frac{1-n}{n}}\cdot dz}{b^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{(z-a)^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \cdot z^{p} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{(z-a)^{\frac{1-n}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} \cdot dz =$$

$$\frac{(z-a)^{\frac{m+1-n}{n}}}{b^{\frac{m+1}{n}}} \cdot z^{p} \cdot \frac{1}{n} dz =$$

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot z^{p} \cdot \frac{dz}{bn}.$$

Zu IIII.

Hier mögen also m, n, p ꝛc. ꝛc. Die Aufgabe verlangt nämlich nicht die Umstände unter denen das Integral von $x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$ einen endlichen Werth erhält, sondern nur solche Umstände, unter denen man für dieses Integral eine endliche **Reihe von Gliedern** findet, wenn auch gleich einzele Glieder in besondern Fällen selbst sich nicht anders als durch unendliche Reihen ausdrucken lassen. Also wird der Umstand, daß $\frac{m+1}{n} - 1$ eine bejahte ganze Zahl r oder $\frac{m+1}{n} = r+1$ ist,

der

der Aufgabe schon ein Genüge leisten, wenn gleich der im Differential vorkommende Ausdruck z^p irrational sein kann, und sich also in solchem Fall selbst nicht anders als durch eine unendliche Reihe bestimmen läßt.

Zu V.

Es verwandelt sich nämlich für $r = 0$ das Differential (II.) in $\frac{z^p . dz}{nb} = \frac{(a + bx^n)^p . nbx^{n-1}}{nb}$. dx, wenn man nur aus II. die Werthe von z und dz substituirt. Ohne die Regel 245. gäbe sich nun hier aus (II.) $\int \frac{z^p . dz}{nb} = \int \frac{(p+1) . z^p . dz}{(p+1) . nb}$

$$= \frac{z^{p+1}}{nb . (p+1)} = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb . (p+1)}$$ wie in 245.

Zu VII.

Solchergestalt sind alle Glieder des Integrals irrational, wenn nur z^p irrational ist.

Zu VIII.

Integral ꝛc. nämlich das unvollkommene, das

$$= \frac{\int (z-a)^r . z^p . dz}{b^r . nb} = \frac{\int (z-a)^r . z^p . dz}{n . b^{r+1}}.$$

Zu XII.

Integral ꝛc. ꝛc. nämlich das vollkommene, wie sich ergiebt, wenn man in VIII.

$\int (z - a)$

$\int (z-a)^r . z^p . dz + \text{Const}$ statt $\int (z-a)^r . z^p . dz$ setzt.

Zu XIII.

Der Voraussetzung gemäs kann p alle Werthe von -1 bis $-(r+1)$ haben, so daß -1 der kleinste, und $-(r+1)$ der größte verneinte Werth von p ist. Nun enthalten die Glieder der Reihe VI. von der Rechten gegen die Linke alle Potenzen von z nach der Reihe von z^0 bis z^r, also $z^0, z^1, z^2 \cdots\cdots z^r$, folglich mag p einen der genannten Werthe, welchen man will, haben, so wird es allemal in VI. eine Potenz der z geben, die mit z^p multiplicirt $z^{-1} = \frac{1}{z}$ giebt. Ein solches Glied, das z^{-1} oder $\frac{1}{z}$ enthält, wird nämlich das erste, zweite, dritte u. s. f. Glied von der Rechten gegen die Linke sein, nachdem $p = -1, -2, -3$ u. s. f. ist. Folglich giebt die Reihe VI. mit $z^p . dz$ (VII.) multiplicirt eine Reihe, in der das erste, oder zweite, oder dritte u. s. f. Glied von der Rechten genommen $\frac{1}{z} dz = \frac{dz}{z}$ enthält, nachdem $p = -1$, oder $= -2$, oder $= -3$ u. s. f. ist. Nun ist $\frac{dz}{z} = d \log z$, also $\int \frac{dz}{z} = \log z$, daher läßt sich für solche Werthe von p in der Reihe VIIII. das nur erwähnte Glied

 nicht

nicht gebrauchen (219. II.); die übrigen Glieder behalten ihre Richtigkeit.

Ex. Das vollkommene Integral $\int \frac{x^3\,dx}{(1+x)^2}$ durch x ausgedruckt erhält man, wenn man in dem Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}z^2 - 3z + 3\log z - \frac{1}{z} + \text{Const}$$

der im Buche durch einen Druckfehler $= 0$ gesetzt worden, schlechtweg den gefundenen Werth der Const, und statt z, $a + bx^n = 1 + x$ setzt, ohne weitere Division. Dieß giebt nun

$$\int \frac{x^3\,dx}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{2} - 3.(1+x) + 3.\log(1+x) - \frac{1}{1+x} + \frac{7}{2}$$

Die Division, die nämlich nach XII oder VIII (nicht nach VIIII.) vorgenommen werden müßte, müßte hier durch $nb^{r+1} = 1.1^4$ also durch 1, nicht durch 2, geschehen. Anfänger müssen sich übrigens hierbei erinnern, daß sich die Logarithmen in diesen Fällen allemal auf die natürlichen beziehen. Es ist nämlich eigentlich $\int \frac{dz}{z} = \frac{lz}{a}$, also $= \log z$ für $a = 1$ (219. IIII. u. 225.)

§. 251.

Nämlich in 249. 2c statt m, $\sqrt{u}$ statt x, und $\frac{du}{2\sqrt{u}}$ statt dx gesetzt, giebt

$$\frac{(\sqrt{u})^{2c}.(a+b\sqrt{u})^{p}\cdot du}{2\sqrt{u}} = \frac{(\sqrt{u})^{2c-1}.(a+b\sqrt{u})^{p}du}{2}$$

$= \frac{u^{c-\frac{1}{2}}.(a+bu^{\frac{1}{2}})^{p}.du}{2}$. Dieß nun zu integriren, muß man in 249. VIIII. und XI. $a+bu^{\frac{1}{2}} = z$ und $r = 2c$ setzen. Wäre c und daher auch $r = 0$, so diente 248. V. wenn man das. $b = n = 1$, und $x = u^{\frac{1}{2}}$ setzt; dadurch gäbe sich

$$f\frac{(a+\sqrt{u})^{p}du}{2\sqrt{u}} = \frac{(a+\sqrt{u})^{p+1}}{p+1}$$

§. 253.

ohne Logarithmen gegeben 2c. 2c. s. 248. VIII. und XIII.

II. Ex. Die Reihe VIIII. 248. giebt

$$(a+bx^{2})^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{(a+bx^{2})}{\frac{3}{2}} - \frac{a}{2}\right)$$

$$= \sqrt{(a+bx^{2})}.\left(\tfrac{2}{3}(a+bx^{2}) - 2a\right) =$$

$$\tfrac{2}{3}(bx^{2} - 2a).\sqrt{(a+bx^{2})}$$

und der Ausdruck XI.

$$-a^{\frac{3}{2}}.(\tfrac{2}{3}-2)=\frac{4a^{\frac{3}{2}}}{3}$$

zum vorigen addirt, und die Summe durch $2b^2$ dividirt, giebt das gesuchte Integral =

$$\frac{\sqrt{(a+bx^2)}.\tfrac{2}{3}(bx^2-2a)+\tfrac{4}{3}a\sqrt{a}}{2b^2}=$$

$$\frac{\sqrt{(a+bx^2)}.(bx^2-2a)+2a\sqrt{a}}{3b^2}.$$

§. 254.

Die erste Gleichung dieses Zus. giebt sich so: es ist $(ax^q+bx^s)^p=\left(x^q.(a+bx^{s-q})\right)^p=x^{pq}.(a+bx^{s-q})^p$.

§. 255.

allemal integriren ꝛc. ꝛc. und zwar durch einen Ausdruck, der keinen Logarithmen enthält, wie (253.)

Ex. Die Reihe VIIII. 248. giebt nebst XI. u. XII. das. $q=2$, $r=n=1$, und $z=a+bx$ gesetzt $\int\sqrt{(ax^2+bx^3)}.dx$

$$=\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a+bx}{\frac{5}{2}}-\frac{a}{\frac{3}{2}}\right)-a^{\frac{5}{2}}.(\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{3})}{b^2}$$

=

$$= \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{15a+15bx}{5}-\frac{15a}{3}\right)-a^{\frac{5}{2}}.\left(\frac{15}{5}-\frac{15}{3}\right)}{15b^2}$$

$$= \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}.(3bx-2a)+2a^{\frac{5}{2}}}{15b^2}.$$

Andere Verwandlungen.

§. 257.

Der Ausdruck hier $\frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}}$ liesse sich auch auf den 248. so bringen. Es ist

$$x\sqrt{(ax+x^2)} = x\sqrt{x^2\left(\frac{a}{x}+1\right)}$$

$$= x^2\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}$$

$$= x^2(1+ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

also der ganze Ausdruck

$$\frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = \frac{a^2dx}{x^2(1+ax^{-1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= a^2.(x^2(1+ax^{-1})^{\frac{1}{2}})^{-1}.dx$$

$$= a^2.x^{-2}.(1+ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}.dx$$

und daher

$$\int \frac{a^2 dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = a^2 . \int x^{-2} . (1 + ax^{-1})^{-\frac{1}{2}} . dx$$

Dieses mit 248. verglichen, giebt

	m	a	b	n	p
dort	m	a	b	n	p
hier	-2	1	a	-1	$-\frac{1}{2}$

Nun sehe man, ob die Bedingung 248. III. hier statt findet, so erhält man

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-2+1}{-1} = +1$$

wie das. erfodert wird; und weil $\frac{m+1}{n} - 1 = r$ das. IIII. so wird hier $r = 1 - 1 = 0$, und das gesuchte Integral, wenn man das. V. noch mit a^2 multiplicirt, =

$$\frac{a^2 . (a + bx^n)^{p+1}}{nb . (p+1)}$$

$$= \frac{a^2 . (1 + ax^{-1})^{\frac{1}{2}}}{-a . \frac{1}{2}}$$

$$= -2a\sqrt{\left(1 + \frac{a}{x}\right)} \text{ oder auch}$$

$$= \frac{-2a\sqrt{(ax + x^2)}}{x} \text{ wie im Buche.}$$

Anfän-

Anfänger thun wohl, wenn sie dergleichen gegebene Formeln wie die hier (257.) auf andere, die sie schon zu behandlen wissen, zu bringen suchen, damit sie von der Allgemeinheit der letztern, wie hier von der 248. desto besser überzeugt werden, und zugleich eine Fertigkeit darin erlangen, zu beurtheilen, ob eine vorgegebene Formel unter einer andern ihnen schon bekannten begriffen sein mag, oder nicht?

§. 260.

s. die Erl. der Anal. endl. Gr. §. 323. S. 89.

§. 261.

vorkommen rc. rc. wie wenn (248. II.) $\frac{m+1}{n}$ ein Bruch wäre.

Von der verkehrten Methode der Tangenten.

§. 262.

s. oben die Erl. zu 77.

§. 264.

Die allgemeine Gleichung, die sich unmittelbar aus der Integration ergiebt, ist

$$y^2 = 2ax + c^2$$

oder $\frac{y^2}{2a} = x + \frac{c^2}{2a}$;

 nun

nun kann man allemal $x = u - \frac{c^2}{2a}$ setzen, und dadurch erhält man

$$\frac{y^2}{2a} = u - \frac{c^2}{2a} + \frac{c^2}{2a} = u$$

also $y^2 = 2au$.

§. 265.

Ex. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangente $= 2x$ (84.)

Aufl. Es werde die Differentialgleichung $axdy - bydx = 0$ gegeben, und die Integralgleichung gesucht, so multiplicire man sie mit $y^{a-1}.x^{-(b+1)}$ dieß giebt

$$x^{-b}.ay^{a-1}dy + y^a.-bx^{-(b+1)}.dx = 0$$

oder $x^{-b}.d(y^a) + y^a.d(-x^b) = 0$

und hier auf beiden Seiten integrirt giebt $0 + Const = \int(axdy - bydx) = \int(x^{-b}.d(y^a) + y^a d(-x^b))$

$= x^{-b}.y^a = \frac{y^a}{x^b}$, also $y^a = x^b.Const.$

Eben das giebt sich noch leichter so: aus der Differentialgleichung

$$axdy - bydx = 0$$

wird $axdy = bydx$ (♀

also $\frac{bdx}{x} = \frac{ady}{y}$ und

und nun integrirt giebt

$$a \log y = b . \log x + \log Const (*)$$

also $$y^a = x^b . Const \quad (☾$$

wie vorhin. Dieser Integralgleichung wollen wir uns hier zur Erfindung der Linie, deren Subtangente $= 2x$ ist, bedienen. Daraus folgt nämlich

$$\frac{ydx}{dy} = 2x \text{ also}$$

$$2xdy = ydx;$$

weil nun hier $a = 2$, und $b = 1$, so verwandelt sich die Integralgleichung (☾) in

$$y^2 = x . Const.$$

welches die Gleichung für die Parabel ist, und es giebt also sonst keine Linie, deren Subtangente $= 2x$ wäre, d. h. der Satz 84. ist auch umgekehrt wahr.

Von der Rectification der krummen Linien.

§. 266.

So trägt man 2c.2c. es läßt sich solches auch rechtfertigen; s. oben 64. u. Erl. das.

(*) An sich ists gleichgültig, ob + Const oder + log Const gesetzt wird, weil log Const selbst eine Const ist; hier aber kommt mir der letzte Ausdruck schicklicher vor, weil blos von Logarithmen die Rede ist.

§. 270.

wo y der andern ꝛc. ꝛc. aber doch allemal der Ordinate in der neilischen Parabel gleich ist. Weil nach gehöriger Ergänzung der Abmessungen $ds = dy.\sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)}$ (268.) und hier $= dy.\frac{z}{a}$, so hat man

$$\sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} = \frac{z}{a}, \text{ also}$$

$$\frac{z^2}{a^2} = 1 + \frac{9y}{4a} = \frac{4a + 9y}{4a}$$

und das giebt

$$z^2 = a^2 + \frac{9}{4}ay$$

oder $\frac{z^2}{\frac{9}{4}a} = \frac{4}{9}a + y;$

nun kann man allemal, wie 264, $y = u - \frac{4}{9}a$ setzen, und das giebt

$$z^2 = \tfrac{9}{4}au$$

welches eine Gleichung für die apollonische Parabel ist. Die Verbindung der neilischen Par. mit der apollonischen wird auch noch aus folgendem erhellen. AC (Fig. 22.) sei eine apollonische Parabel über der Axe AE, nimmt man nun auf AF, die auf AE senkrecht ist, Abscissen $A\alpha = A1$, $A\beta = A2$, $A\gamma = A3$, und nun die Ordinaten αa, βb, γc so,

so, daß sich solche wie die Flächen der apoll. Par. A 1 I, A 2 II, A 3 III, also wie die Produkten A 1 . 1 I, A 2 . 2 II, A 3 . 3 III verhalten, so liegen die Punkte A, a, b, c in der neilischen Parabel.

Bew. In der neil. Par. ist $y^3 = ax^2$, also für die äussere Axe AF, $ay^2 = x^3$, folglich ist y wie die Quadratwurzel aus dem Würfel der Abscisse, aber eben so verhalten sich die Flächen der apoll. Parab. (208. Erl.) also sind αa, βb, γc Ordinaten für die neil. Par. und man kann, wenn man den Inhalt der parabolischen Fläche für eine gewisse Abscisse Z nennt, sagen, es sei in der neilischen Parabel für solche Abscisse

$$y = \frac{Z}{a}$$

Was also in der apollon. Par. Flächen sind, sind in der neilischen Linien, und diese hängt von jener so ab, wie die logistische Linie von der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten (Erl. zu 233. VI.)

Der nur erwiesene Satz, daß sich in der neilischen Parabel die Ordinaten wie in der apoll. die Flächen verhalten, widerspricht dem Satz im Buche, daß sich das Element der Länge 2c. wie das Elem. der Fläche der apoll. Par. verhält, nicht, weil bekanntlich die Verhältnis der Differentialien mit der Verhältnis der Summen nicht einerlei ist, und folglich aus dem hier erwiesenen Satze nicht geschlossen werden kann, daß sich die Elemente der Flächen der apoll. Par. wie die Elem. der Ordinaten des neili-

schen

schen verhalten müßten, welches freilich dem Satz im Buche zuwider wäre.

Die Verzeichnung der neilischen Parabel aus der apollonischen ist übrigens sehr leicht, und ich beziehe mich dieserwegen nur auf Wolfs Anfangsgründe S. 1684. §. 225. u. folg. Ihre Quadratur ist $Z = \frac{3}{5}xy$, wie für die apollonische $Z = \frac{2}{3}xy$.

Es erhellet zugleich aus diesem §. wie Quadratur und Rectification mit einander zusammenhängen, und es wird nicht überflüßig sein, dieses noch durch ein besonderes Beispiel zu erläutern.

EQ (Fig. 23.) sei die Linie, deren Quadratur die Hyperbel rectificiren soll; man sucht ihre Gleichung. Es sei AM die Hyperbel zwischen den Asymptoten CG, CH; CA die halbe Axe $= a\sqrt{2}$, wenn $CB = BA = a$; $CP = x$, $PM = y$, so hat man

$$xy = a^2$$

also $$x = a^2 y^{-1}$$

und $$dx = a^2 . -1 . y^{-2} dy$$

$$= -\frac{a^2}{y^2} dy$$

folglich $$dx^2 = \frac{a^4}{y^4} dy^2$$ und

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

$$= \sqrt{\left(dy^2 + \frac{a^4 dy^2}{y^4}\right)}$$

=

$$= \frac{\sqrt{(a^4 + y^4)}}{y^2} . dy$$

Nun ziehe man AE, MQ und mq, welche der MQ unendlich nahe ist, gleichlaufend mit CG. Weil nun das Element der Fläche DEQN dem Element des Bogens AM durch eine beständige Grösse multiplicirt gleich sein soll, so hat man

$$NQ . Nn = a . Mm$$

Es sei nun NQ = Z; weil nun ferner

$$Nn = - dy, \text{ so ist}$$

$$- zdy = \frac{a\sqrt{(a^4 + y^4)}}{y^2} dy$$

$$\text{und} \quad z^2 = \frac{a^6}{y^4} + a^2$$

wo also die Fläche DEQN = a . AM.

Daraus folgt

$$2zdz = a^6 . - 4y^{-5} dy, \text{ also}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-a^6 . 4y^{-5}}{2z} = \frac{-2a^6 . y^{-5}}{\sqrt{\left(\frac{a^6}{y^4} + a^2\right)}}$$

$$= \frac{-2a^5 . y^{-5}}{\frac{\sqrt{(a^4 + y^4)}}{y^2}}$$

=

$$= \frac{-2a^5}{y^3\sqrt{(a^4+y^4)}}$$

Dieß wird $= \infty$ für $y = 0$, und $= 0$ für $y = \infty$; und der krummen Linie QE Coordinaten sind $CN = y$ und $NQ = z$. Für $y = 0$ ist $z = \infty$, also CI eine Asymptote. Für $y = \infty$ ist $z = a$; man nehme also $CK = CD = a$ und ziehe KL mit CH parallel, so ist KL der krummen Linie zwote Asymptote, die sie im Unendlichen berührt.

Für $y = \frac{1}{n} a$ ist

$$z = a\sqrt{\left(\frac{a^4}{\frac{1}{n^4}a^4} + 1\right)}$$

$$= a\sqrt{(n^4+1)}$$

welches für kleine y gar bald sich dem Werthe $n^2 a$ nähert.

Für $n = 1$ ist $z = a\sqrt{2}$ oder $DE = CA$.

Nimt man $KR = y$, $RQ = v$, so kommt

$$v^2 + 2av = \frac{a^6}{y^4}$$

also ist die krumme Linie eine vom sechsten Grad.

§. 272.

s. die Erl. zu 270.

Daß sich lx durch x nicht algebraisch geben läßt, erhellet aus Erl. 223. Man erhält nämlich allemal

für

für c und folglich auch für lx eine Gleichung von einem unendlich hohen Grade, die sich also nicht algebraisch auflösen läßt. Indessen folgt doch hieraus nicht die Unmöglichkeit der Quadratur der Hyperbel für gegebene asymptotische Räume. Ein gegebener asymptotischer Raum kann nämlich gewiß keinen unmöglichen und nur **einen** möglichen Werth haben, also bezieht sich ein gegebener asympt. Raum gewiß nicht auf die unzählige unmögliche, sondern blos auf den einzigen möglichen Werth, den die Gleichung 223. giebt, und es bliebe demnach immer noch möglich, für bestimmte asymptotische Räume Gleichungen anzugeben, die frei von Logarithmen lauter Grössen enthielten, welche algebraische Funktionen von einander wären. Für den asymptotischen Raum aber, der überhaupt einem x zugehörte, d. h. für einen unbestimmten asymptotischen Raum würden diese Schlüsse nicht gelten. Ist nämlich der Raum, der einem x zugehört, nicht schon bestimmt, so weiß man aus der Verbindung der Hyperbel mit den Logarithmen, daß diesem x unzählige asymptotische Räume zugehören, worunter nur ein möglicher ist; die allgemeine Gleichung für den diesem x zugehörigen asymptotischen Raum muß also alle diese unzählige Räume angeben, und man hätte also den zu x gehörigen asymptotischen Raum durch eine Gleichung von einem unendlich hohen Grade, der sich also, weil man eine solche Gleichung nicht auflösen kann, nicht angeben läßt, dieß druckt man so aus: **die unbestimmte Quadratur der Hyperbel ist unmöglich.**

Verbesserung.

Die in der Vorrede versprochenen zu den Erläuter. Anal. konnten aus besondern Ursachen diesmal ni beigefügt werden; es soll bey einer andern Geleg heit geschehen. Im gegenwärtigen ist folgendes Ve sehen mit eingeschlichen:

S. 80. st. bessere Begriffe erlangen l. von dene man auf solche Art bessere Begriffe er langen wird.

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 13.
Fig. 10.
Fig. 15.
Fig. 14. num. 1
Fig. 16.
Fig. 12.
Fig: 14. num: 2.
Fig. 18.
Fig. 17.
Fig. 20.
Fig. 19.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 22.
Lincke del.